

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Саратовский государственный технический
университет имени Гагарина Ю.А.»

Энгельсский технологический институт (филиал)



УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора по СПДО
О.Г. Коваленко

**Методические указания
к выполнению практических занятий учебной дисциплины
ОП.10 Численные методы**

по специальности:

09.02.07 Информационные системы и программирование

Методические указания
рассмотрены на заседании
предметной (цикловой) методической комиссии
специальности 09.02.07
«25» июня 2024 года, протокол № 11

Председатель ПЦМК  А.А. Сдобнова

Энгельс 2024

ОРГАНИЗАЦИЯ - РАЗРАБОТЧИК:

Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

РАЗРАБОТЧИК: Зотова А.А., преподаватель спецдисциплин ОСПДО

Пояснительная записка

По учебному плану в соответствии с рабочей программой на изучение ОП.10 Численные методы обучающимися предусмотрено аудиторных занятий - 66 часов, из них практических занятий – 32 часов. В методические указания включены 16 практических занятий по темам курса. Каждое практическое занятие содержит сведения о цели его проведения и практическом использовании результатов исследования, необходимых для проведения занятия, включает краткие теоретические сведения, этапы выполнения работы.

Целью практических занятий по ОП.10 Численные методы является: закрепление теоретических знаний на практике

Практические занятия

Номер и тема раздела	Номер практического занятия	Наименование темы занятия	Кол-во часов (ауд.)
1	2	3	4
Тема 1. Элементы теории погрешностей	1	Абсолютная и относительная погрешность числа и функции	2
	2	Проверка тождественности логических формул. Преобразование формул	2
Тема 2. Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений	3	Метод деления отрезка пополам	2
	4	Метод простой итерации	2
	5	Метод Ньютона (касательных)	2
Тема 3. Решение систем линейных алгебраических уравнений	6	Метод Гаусса	4
	7	Метод итераций решения СЛАУ	2
Тема 4. Интерполирование и экстраполирование функций	8	Построение многочлена Лагранжа	2
	9	Построение интерполяционного полинома в форме Ньютона	2
	10	Интерполяция сплайнами	4
Тема 5. Численное интегрирование	11	Интегрирование методами: прямоугольников, трапеций, парабол	2
	12	Интегрирование с помощью формул Гаусса	2
Тема 6. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений	13	Применение метода Эйлера	2
	14	Применение метода Рунге - Кутты	2

Номер и тема раздела	Номер практического занятия	Наименование темы занятия	Кол-во часов (ауд.)
1	2	3	4
		Итого	32

Практическое занятие № 1, 2

Тема раздела: Элементы теории погрешностей

Тема практического занятия: Абсолютная и относительная погрешность числа и функции. Проверка тождественности логических формул. Преобразование формул

Цель: вычислить абсолютную и относительную погрешность

Планируемые результаты:

уметь: давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;

знать: методы хранения чисел в памяти электронно-вычислительной машины (далее – ЭВМ) и действия над ними, оценку точности вычислений;

Материально-техническое и комплексно-методическое обеспечение: Рабочая тетрадь, методическое пособие по выполнению практических работ по дисциплине «Численные методы», калькулятор

Методы обучения: перцептивный аспект

Форма организации учебной деятельности: практическое занятие

Время выполнения: 180 минут

Вопросы для проверки готовности обучающихся к практическому занятию:

1. Что такое абсолютная погрешность приближенного значения величины?
2. Что такое относительная погрешность приближенного значения величины?
3. Какое влияние на погрешность арифметических действий оказывают погрешности исходных данных?
4. В какой зависимости находится абсолютная погрешность значения функции одной переменной от абсолютной погрешности значения аргумента?
5. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по правилам подсчета цифр с пооперационным учетом ошибок? на заключительном этапе?
6. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по методу строгого учета предельных погрешностей с пооперационным учетом ошибок? на заключительном этапе?
7. Как вычисляются предельные погрешности результата при использовании методики итоговой оценки ошибки вычислений?
8. В чем основное отличие метода границ от вычислений по методу строгого учета границ погрешностей?
9. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по методу границ с пооперационным учетом ошибок? на заключительном этапе?

Форма отчетности по занятию: письменная работа

Последовательность выполнения работы

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Краткие теоретические сведения:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Приближение числа. Погрешности приближенных значений чисел

Пусть X -точное значение некоторой величины, x - наилучшее приближение этой величины.

Определение: Абсолютной погрешностью e_x приближенного значения числа X называется модуль разности между точным числом X его приближенным значением x , т.е.

$$e_x = |X - x|.$$

Определение: Число x называется приближенным значением точного числа X с точностью до Δx , если абсолютная погрешность приближенного значения a не превышает Δx , т.е.

$$|X - x| \leq \Delta x.$$

Определение: Число Δx называется границей абсолютной погрешности приближенного значения числа x .

Число Δx на практике стараются подобрать как можно меньше и простое по записи.

Из неравенства (1) найдем границы, в которых заключено точное значение числа X :

$$x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x.$$

$НГ_x = x - \Delta x$ - нижняя граница приближения величины X .

$ВГ_x = x + \Delta x$ - верхняя граница приближения величины X .

Определение: Относительной погрешностью δx приближенного числа x числа X называется отношение абсолютной погрешности Δx этого приближения к числу x , т.е.

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}$$

Если первая значащая цифра в относительной погрешности δx меньше 5, то граница относительной погрешности определяется из неравенства $\delta x \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$, где n - количество верных цифр.

Вычисление погрешностей арифметических действий

$x \# y$	$\Delta(x \# y)$	$\Delta(x \# y)$
$x + y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{ x }{ x + y } \delta x + \frac{ y }{ x + y } \delta y$
$x - y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{ x }{ x - y } \delta x + \frac{ y }{ x - y } \delta y$
xy	$ x \Delta y + y \Delta x$	$\delta x + \delta y$
x/y	$\frac{ x \Delta y + y \Delta x}{y^2}$	$\delta x + \delta y$

Оценка погрешностей значений функций

$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\delta f(x)$
\sqrt{x}	$\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2} \delta x$
$\frac{1}{x}$	$\frac{\Delta x}{x^2}$	δx
$\sin x$	$ \cos x \cdot \Delta x$	$ \operatorname{ctgx} \cdot \delta x$
$\cos x$	$ \sin x \cdot \Delta x$	$ \operatorname{tgx} \cdot \delta x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2 x }{ \sin 2x } \cdot \delta x$
$\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\delta x}{ \ln x }$
$\lg x$	$\frac{\Delta x}{x \ln 10}$	$\frac{\delta x}{ \lg x } \cdot \ln 10$
e^x	$e^x \Delta x$	$ x \cdot \delta x$
$\arcsin x$	$\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{ x }{ \arcsin x \sqrt{1-x^2}} \cdot \delta x$
$\arccos x$	$\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{ x }{ \arccos x \sqrt{1-x^2}} \cdot \delta x$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{\Delta x}{1+x^2}$	$\frac{ x }{ \operatorname{arctgx} \sqrt{1+x^2}} \cdot \delta x$
x^y	$x^y (y \frac{\Delta x}{x} + \ln x \cdot \Delta y)$	$ y \ln x \cdot \delta y + y \cdot \delta x$

Способы приближенных вычислений по заданной формуле

1. Вычисление по правилам подсчета цифр

При вычислении данным методом явного учета погрешностей не ведется, правила подсчета цифр показывают лишь, какое количество значащих цифр или десятичных знаков в результате можно считать надежными.

Правила метода:

1. При сложении и вычитании приближенных чисел следует считать верными столько десятичных знаков после запятой, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом знаков после запятой.
2. При умножении и делении приближенных чисел нужно выбрать число с наименьшим количеством значащих цифр и округлить остальные числа так, чтобы в них было лишь на одну значащую цифру больше, чем в наименее точном числе.
3. При определении количества верных цифр в значениях функций от приближенных значений аргумента следует грубо оценить значение модуля производной функции. Если

это значение не превосходит единицы или близко к ней, то в значении функции можно считать верными столько знаков после запятой, сколько их имеет значение аргумента. Если же модуль производной функции превосходит единицу, то количество верных десятичных знаков в значении функции меньше, чем в аргументе на величину, равную разряду оценки производной.

4. В записи промежуточных результатов следует сохранять на одну цифру больше, чем описано в правилах 1-3. В окончательном результате эта запасная цифра округляется.

Правила подсчета цифр носят оценочный характер, но практическая надежность этих правил достаточно высока.

При исследовании данного метода используется расчетная таблица – расписка формул.

Пример: Вычислить значение функции $A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a + b^2)}$, $a = 2,156$, $b = 0,927$.

a	2,156	пояснения при подсчете верных цифр
b	0,927	
e^a	8,637	$e^a = e^{2,156} = 8,63652$, оценим производную $(e^a)' = e^a \approx 2^{2,156} \approx 5... < 10$, значит (используя правило 3), надо сохранить на один знак меньше, чем в значении аргумента + 1 запасная цифра.
\sqrt{b}	0,9628	$\sqrt{b} = 0,9628083$, оценим производную $(\sqrt{b})' = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2\sqrt{0,927}} < 1$, (используя правило 3) сохраняем три цифры как в аргументе + 1 запасная цифра.
$e^a + \sqrt{b}$	9,600	$e^a + \sqrt{b} = 8,637 + 0,9628 = 9,5998$, (по правилу 1) результат округляется до трех знаков после запятой, т.е. 9,600.
b^2	0,8593	$b^2 = 0,927^2 = 0,859329$, (по правилу 2) результат округляем до трех цифр, как аргумент + 1 запасная цифра.
$a + b^2$	3,0153	$a + b^2 = 2,156 + 0,8593 = 3,0153$, (используя правило 1) округляем результат до трех цифр + 1 запасная цифра.

$\ln(a+b^2)$	1,1037	$\ln(a+b^2) = \ln(3.0153) \approx 1.10369933$, оценим производную $(\ln(a+b^2))' = \frac{1}{a+b^2} = \frac{1}{3.0153} < 1$, (используя правило 3) сохраняем три цифры как в аргументе + 1 запасная цифра.
A	8,698	$A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a+b^2)} = \frac{9,600}{1,1037} \approx 8,698$, при округлении результата использовали правило 2.
A	8,70	8-запасная цифра, По правилу 4, запасная цифра в окончательном результате округляется $8,698 \approx 8,70$

2. Вычисление со строгим учетом предельных абсолютных погрешностей

Этот метод предусматривает использование правил вычисления предельных абсолютных погрешностей. При пооперационном учете ошибок промежуточные результаты, так же как и

их погрешности, заносятся в специальную таблицу, состоящую из двух параллельно заполняемых частей – для результатов и их погрешностей. В таблице приведены пошаговые вычисления со строгим учетом предельных абсолютных погрешностей по той же формуле, что и в предыдущем примере, и в предположении, что исходные данные a и b имеют предельные абсолютные погрешности $\Delta a = \Delta b = 0,0005$, т.е. у a и b все цифры верны.

Промежуточные результаты вносятся в таблицу после округления до одной запасной цифры; значения погрешностей для удобства округляются (*с возрастанием!*) до двух значащих цифр. Проследим ход вычислений на одном этапе.

Пример: Вычислить значение функции $A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a+b^2)}$, $a = 2,156$, $b = 0,927$.

a	b	e^a	\sqrt{b}	$e^a + \sqrt{b}$	b^2	$a+b^2$	$\ln(a+b^2)$	A
2,156	0,927	8,637	0,9628	9,603	0,860	3,016	1,104	8,70
Δa	Δb	$\Delta(e^a)$	$\Delta(\sqrt{b})$	$\Delta(e^a + \sqrt{b})$	$\Delta(b^2)$	$\Delta(a+b^2)$	$\Delta \ln(a+b^2)$	ΔA
0,0005	0,0005	0,0049	0,00027	0,0054	0,0016	0,0021	0,00076	0,016

Используя калькулятор, имеем $e^{2,156} = 8,63652$.

При вычислении предельных абсолютных погрешностей используем таблицу 1.2.

$$\Delta(e^a) = e^a \cdot \Delta a = e^{2,156} \cdot 0,0005 = 0,0043182 \approx 0,0044.$$

Судя по ее величине, в полученном значении экспоненты в строгом смысле верны два знака после запятой. Округляем это значение с одной запасной цифрой: $e^{2,156} \approx 8,637$ и вносим его в таблицу.

При этом возникает погрешность округления: $8,637 - 8,63652 = 0,00048$.

Вслед за этим вычисляем полную погрешность полученного результата (погрешность действия плюс погрешность округления: $0,0044 + 0,00048 = 0,0049$), которую так же вносим в таблицу.

Все последующие действия выполняем аналогично с применением соответствующих формул для предельных абсолютных погрешностей.

Округляя окончательный результат до последней верной в строгом смысле цифры, а так же округляя погрешность до соответствующих разрядов результата, окончательно получаем: $A = 8,7 \pm 0,1$.

Вычисления по методу строго учета предельных абсолютных погрешностей можно выполнить на компьютере с помощью программы. Если не производить пооперационного учета движения вычислительной ошибки, то достаточно вычислить значение предельной абсолютной погрешности окончательного результата, а затем произвести его округление.

3. **Вычисление по методу границ**

Если нужно иметь абсолютно гарантированные границы возможных значений вычисляемой величины, используют специальный метод вычислений – *метод границ*.

Пусть $f(x, y)$ – функция непрерывная и монотонная в некоторой области допустимых значений аргументов x и y . Нужно получить ее значение $f(a, b)$, где a и b – приближенные значения аргументов, причем достоверно известно, что

$$НГ_a < a < ВГ_a; \quad НГ_b < b < ВГ_b.$$

Здесь НГ, ВГ - обозначение соответственно нижней и верхней границ значений параметров. Итак, вопрос состоит в том, чтобы найти строгие границы значения (a, b) при известных границах значений a и b .

Допустим, что функция $f(x, y)$ возрастает по каждому из аргументов x и y . Тогда

$$f(НГ_a, НГ_b) < f(a, b) < f(ВГ_a, ВГ_b).$$

Пусть теперь $f(x, y)$ возрастает по аргументу x и убывает по аргументу y . Тогда будет строго гарантировано неравенство

$$f(НГ_a, ВГ_b) < f(a, b) < f(ВГ_a, НГ_b).$$

Рассмотрим указанный принцип на примере основных арифметических действий. Пусть $f_1(x, y) = x + y$. Тогда очевидно, что

$$НГ_a + НГ_b < a + b < ВГ_a + ВГ_b.$$

Точно так же для функции $f_2(x, y) = x - y$ (она по x возрастает, а по y убывает) имеем

$$НГ_a - ВГ_b < a - b < ВГ_a - НГ_b.$$

Аналогично для умножения и деления:

$$НГ_a \cdot НГ_b < a \cdot b < ВГ_a \cdot ВГ_b;$$

$$\frac{НГ_a}{ВГ_b} < \frac{a}{b} < \frac{ВГ_a}{НГ_b}$$

Вычисляя по методу границ с пошаговой регистрацией промежуточных результатов, удобно использовать обычную вычислительную таблицу, состоящую из двух строк – отдельно для вычисления НГ и ВГ результата (по этой причине метод границ называют еще методом двоичных вычислений). При выполнении промежуточных вычислений и округлении результатов используются все рекомендации правил подсчета цифр с одним важным дополнением: округление нижних границ ведется по недостатку, а верхних по – избытку. Окончательные результаты округляются по этому же правилу до последней верной цифры.

Пример: Вычислить значение функции $A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a+b^2)}$, $a = 2,156$, $b = 0,927$.

Нижняя и верхняя границы значений a и b определены из условия, что в исходных данных $a = 2,156$ и $b = 0,927$ все цифры верны ($\Delta a = \Delta b = 0,0005$), т.е. $2,1555 < a < 2,1565$; $0,9265 < b < 0,9275$.

	a	b	e^a	\sqrt{b}	$e^a + \sqrt{b}$	b^2	$a+b^2$	$\ln(a+b^2)$	A
НГ	2,1555	0,9265	8,63220	0,96255	9,59475	0,85840	3,01434	1,10338	8,689 4
ВГ	2,1565	0,9275	8,64084	0,96307	9,60391	0,86026	3,01676	1,10419	8,704 1

Таким образом, результат вычислений значения A по методу границ имеет вид $8,6894 < A < 8,7041$.

По результатам вычислений получаем

$$A = \frac{8,6894 + 8,7041}{2} = 8,69675; \quad \Delta A = \frac{8,7041 - 8,6894}{2} = 0,00735,$$

что дает $A = 8,697 \pm 0,008$, или при записи верными цифрами, $A = 8,7 \pm 0,01$.

Этапы выполнения работы:

Задание 1.

Вычислите значение величины Z при заданных значениях параметров a , b и c , используя «ручные» расчетные таблицы для пошаговой регистрации результатов вычислений, тремя способами:

- 1) по правилам подсчета цифр; 1б
- 2) с систематическим учетом границ абсолютных погрешностей;
- 3) по способу границ. Сравните полученные результаты между собой, прокомментируйте различие методов вычислений и смысл полученных числовых значений. В результате выполнения практической работы необходимо сделать обоснованный вывод о целесообразности и эффективности использования тех или иных методов и средств вычислений

Номер варианта	Z	a	b	c
1	$\frac{\sqrt{ab}}{b-2c}$	3,4	6,22	0,149
2	$\frac{(b-c)^2}{2a+b}$	4,05	6,723	0,03254
3	$\frac{\ln b - a}{a^2 + 12c}$	0,7219	135,347	0,013
4	$\frac{b - \sin a}{a + 3c}$	3,672	4,63	0,0278
5	$\frac{10c + \sqrt{b}}{a^2 - b}$	1,24734	0,346	0,051
6	$\frac{(a-c)^2}{\sqrt{a} + 3b}$	11,7	0,0937	5,081
7	$\frac{a - \sin b}{b^2 + 6c}$	1,75	1,21	0,041
8	$\frac{\sqrt{b-c}}{\ln a + b}$	18,0354	3,7251	0,071
9	$\frac{\ln c - 10a}{\sqrt{bc}}$	0,113	0,1056	89,4
10	$\frac{\ln(b+c)}{b-ac}$	0,0399	4,83	0,072
11	$\frac{\sqrt{a+b}}{3a-c}$	1,574	1,40	1,1236
12	$\frac{ab-4c}{\ln a + b}$	12,72	0,34	0,0290
13	$\frac{a - \cos b}{13c + b}$	3,49	0,845	0,0037
14	$\frac{ac+b}{\sqrt{b-c}}$	0,0976	2,371	1,15874
15	$\frac{a + \cos c}{2a + b}$	0,11587	4,25	3,00971

Критерии оценивания:

«Отлично» (90 -100% правильно выполненных заданий)

«Хорошо» (72 – 89 % правильно выполненных заданий)

«Удовлетворительно» (61 -71 % правильно выполненных заданий)

«Неудовлетворительно» (<60 % правильно выполненных заданий)

Практическое занятие № 3, 4, 5

Тема раздела: Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений

Тема практического занятия: Метод деления отрезка пополам. Метод простой итерации. Метод Ньютона (касательных)

Цель: закрепить умения отделять корни алгебраических уравнений;

- закрепить умения решать алгебраические уравнений приближенными методами (метод половинного деления).

- закрепить умения решать алгебраические уравнений приближенными методами (метод итераций).

- закрепить умения решать алгебраические уравнений приближенными методами (метод хорд и касательных).

Планируемые результаты:

уметь: выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи;

знать: методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.

Материально-техническое и комплексно-методическое обеспечение: Рабочая тетрадь, методическое пособие по выполнению практических работ по дисциплине «Численные методы», калькулятор

Методы обучения: перцептивный аспект

Форма организации учебной деятельности: практическое занятие

Время выполнения: 270 минут

Вопросы для проверки готовности обучающихся к практическому занятию:

1. Что означает «решить уравнение аналитически» и «решить уравнение численно»?
2. В чем заключается задача отделения корней?
3. В чем состоит основная идея метода половинного деления?
4. Может ли метод половинного деления дать точное значение корня уравнения?
5. Дайте общее описание метода итераций.
6. Запишите формулы для построения итерационных последовательностей для итерационного метода.
7. Дайте общее описание метода касательных.
8. Дайте общее описание метода хорд.
9. Нарисуйте геометрические схемы методов касательных и хорд.
10. Запишите формулы для построения итерационных последовательностей для каждого метода.
11. Как проверяется требуемая точность в методах?

Форма отчетности по занятию: письменная работа

Последовательность выполнения работы

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Краткие теоретические сведения:

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий.

1. Постановка задачи решения уравнений

Пусть имеется уравнение вида $f(x)=0$, где $f(x)$ - алгебраическая или трансцендентная функция.

Решить такое уравнение – значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значения корней (с указанной точностью). Ограничимся обсуждением методов поиска лишь действительных корней, не затрагивая проблему корней комплексных.

2. Отделение корней алгебраических и трансцендентных уравнений

Решение указанной задачи начинается с отделения корней, т.е. с установления:

количества корней;

наиболее «тесных» промежутков, каждый из которых содержит только один корень.

Следует отметить, что универсальных приемов решения этой задачи, пригодных для любых уравнений, не существует.

Тем не менее, отделение корней во многих случаях можно произвести графически.

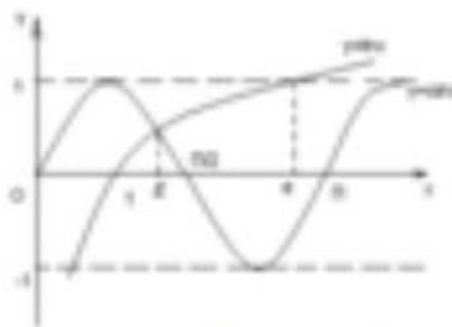
Упростим задачу, заменив уравнение $f(x)=0$ равносильным ему уравнением $f_1(x)=f_2(x)$.

В этом случае строятся графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а потом на оси x отмечаются отрезки, локализирующие абсциссы точек пересечения этих графиков.

При решении задачи об отделении корней бывают полезными следующие очевидные положения:

1. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков (т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$), то уравнение (2.1) имеет на этом отрезке, по меньшей мере, один корень.
2. Если функция $f(x)$ к тому же еще и монотонна, то корень на отрезке $[a;b]$ единственный.

Пример: Для графического отделения корней уравнения $\sin 2x - \ln x = 0$ преобразуем его к равносильному уравнению $\sin 2x = \ln x$ и отдельно построим графики функций $\sin 2x$ и $\ln x$.



Из графика вполне очевидно, что уравнение имеет единственный корень ξ и этот корень находится на отрезке $[1; 1,5]$.

Вычислим для проверки значения функции $f(x) = \sin 2x - \ln x$ на концах отрезка $[1; 1,5]$: $f(1) = 0.909298$; $f(1,5) = -0,264344$. Как видно, корень на отрезке $[1; 1,5]$ действительно имеется.

Рассмотренный прием позволяет при желании сузить отрезок, полученный графическим способом.

Так, в нашем примере, имеем $f(1,3)=0,253138>0$, так что отрезком, на котором находится корень, можно считать $[1,3;1,5]$.

3. Метод половинного деления

Пусть уравнение $f(x)=0$ имеет на отрезке $[a;b]$ единственный корень, причем функция $f(x)$ на этом отрезке непрерывна. Разделим отрезок $[a;b]$ пополам точкой $c=(a+b)/2$. Если $f(c)\neq 0$ (что практически наиболее вероятно), то возможны два случая: $f(x)$ меняет знак либо на отрезке $[a;c]$ (рис 1), либо на отрезке $[c;b]$ (рис 2).

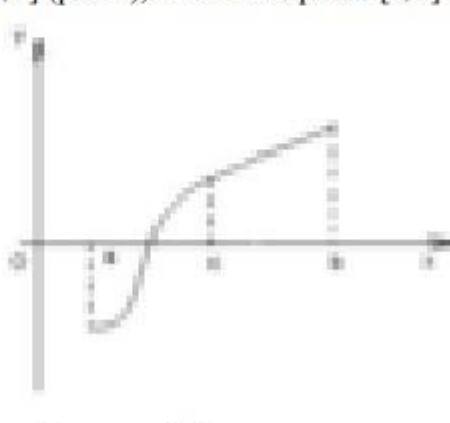


Рис 1. – функция $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a;c]$
знак на отрезке $[c;b]$



Рис 2. – функция $f(x)$ меняет

Выбирая в каждом случае тот из отрезков, на котором функция меняет знак, и продолжая процесс половинного деления дальше, можно прийти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения. Метод половинного деления требует утомительных ручных вычислений, однако он легко реализуется с помощью программы на компьютере.

4. Пример решения уравнений методом половинного деления

Пример: Найти корень уравнения $\sin 2x - \ln x = 0$ на отрезке $[1,3;1,5]$ с точностью до 10^{-3} .

Решение: Уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ имеет единственный корень на отрезке $[1,3;1,5]$

Уточним корень уравнения: Найдем середину отрезка $[1,3;1,5]$: $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1,3+1,5}{2} = 1,4$.

Определим, на каком из полученных отрезков $[1,3;1,4]$ и $[1,4;1,5]$ функция $f(x) = \sin 2x - \ln x$ меняет свой знак.

$$\begin{array}{ll} 1) [1,3;1,4]: & f(1,3) = \sin(2 \cdot 1,3) - \ln(1,3) > 0; \\ & f(1,4) = \sin(2 \cdot 1,4) - \ln(1,4) < 0. \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2) [1,4;1,5]: & f(1,4) = \sin(2 \cdot 1,4) - \ln(1,4) < 0; \\ & f(1,5) = \sin(2 \cdot 1,5) - \ln(1,5) < 0. \end{array}$$

Значит, корень уравнения находится на отрезке $[1,3;1,4]$.

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10^{-3} :

$$\varepsilon = \frac{1,4 - 1,3}{2} = 0,05 > 10^{-3}, \text{ точность не достигнута.}$$

Разделим отрезок $[1,3;1,4]$ пополам точкой $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1,3+1,4}{2} = 1,35$.

Определим, на каком из полученных отрезков $[1,3;1,35]$ и $[1,35;1,4]$ функция $f(x) = \sin 2x - \ln x$ меняет свой знак.

$$\begin{array}{ll} 1) [1,3;1,35]: & f(1,3) = \sin(2 \cdot 1,3) - \ln(1,3) > 0; \\ & f(1,35) = \sin(2 \cdot 1,35) - \ln(1,35) > 0. \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2) [1,35;1,4]: & f(1,35) = \sin(2 \cdot 1,35) - \ln(1,35) > 0; \\ & f(1,4) = \sin(2 \cdot 1,4) - \ln(1,4) < 0. \end{array}$$

Значит, корень уравнения находится на отрезке $[1,35;1,4]$.

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10^{-3} :

$$\varepsilon = \frac{1,4 - 1,35}{2} = 0,025 > 10^{-3}, \text{ точность не достигнута.}$$

Снова разделим отрезок $[1,35; 1,4]$ пополам точкой $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1,35+1,4}{2} = 1,375$.

Определим, на каком из полученных отрезков $[1,35; 1,375]$ и $[1,375; 1,4]$ функция $f(x) = \sin 2x - \ln x$ меняет свой знак.

- 1) $[1,35; 1,375]$: $f(1,35) = \sin(2 \cdot 1,35) - \ln(1,35) > 0$;
 $f(1,375) = \sin(2 \cdot 1,375) - \ln(1,375) > 0$.
 2) $[1,375; 1,4]$: $f(1,375) = \sin(2 \cdot 1,375) - \ln(1,375) > 0$.
 $f(1,4) = \sin(2 \cdot 1,4) - \ln(1,4) < 0$.

Значит, корень уравнения находится на отрезке $[1,375; 1,4]$.

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10^{-3} :

$$\varepsilon = \frac{1,4 - 1,375}{2} = 0,0125 > 10^{-3}, \text{ точность не достигнута.}$$

Продолжая делить отрезок пополам и проверять знаки функции на новых промежутках, до тех пор, пока не будет достигнута нужная точность решения, получим:

Решение уравнения с точностью 10^{-3} : $x=1,399$.

Предположим, что уравнение можно записать в виде

$$x = \varphi(x). \quad (1.1)$$

Возьмем произвольную точку x_0 из области определения функции $\varphi(x)$ и будем строить последовательность чисел $\{x_n\}$, определенных с помощью рекуррентной формулы

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \quad (1.2)$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется итерационной последовательностью. При ее изучении встают два вопроса:

1. Можно ли процесс построения последовательности $\{x_n\}$ продолжать неограниченно, т. е. будут ли эти числа принадлежать области определения функции $\varphi(x)$?

2. Если итерационная последовательность (1.2) бесконечна, то как ведут себя ее члены при $n \rightarrow \infty$?

Ответ на оба вопроса дает следующая теорема.

Теорема о сходимости итерационной последовательности.

Пусть c - корень уравнения (1.1) и пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на отрезке $[c - \delta, c + \delta]$ условию Липшица с константой $L < 1$

$$|y_2 - y_1| = |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|, \quad L < 1. \quad (1.3)$$

Тогда при любом выборе x_0 на отрезке $[c - \delta, c + \delta]$ существует бесконечная итерационная последовательность $\{x_n\}$ (1.2), сходящаяся к корню уравнения (1.1) $x = c$. Этот корень является единственным на отрезке $[c - \delta, c + \delta]$.

Напомним известный факт из математического анализа: выполнение условия Липшица (1.3) будет заведомо обеспечено, если предположить, что функция $\varphi(x)$ имеет на отрезке $[c - \delta, c + \delta]$ непрерывную производную, $\varphi'(x)$ модуль которой меньше единицы: $|\varphi'(x)| \leq m < 1$. В этом случае согласно формуле конечных приращений Лагранжа будем иметь

$$|y_2 - y_1| = |\varphi'(\xi)(x_2 - x_1)| \leq m|x_2 - x_1|. \quad (1.4)$$

Мы получили неравенство (1.3) с константой Липшица $L = m$.

После этого замечания перейдем к доказательству теоремы. Число c является корнем уравнения (1.1), так что $c = \varphi(c)$. Возьмем произвольную точку x_0 на отрезке $[c - \delta, c + \delta]$. Она отстоит от точки c не больше, чем на δ : $|x_0 - c| \leq \delta$.

Вычислим $x_1 = \varphi(x_0)$. При этом будем иметь

$$|x_1 - c| = |\varphi(x_0) - \varphi(c)| \leq L|x_0 - c| \leq L\delta. \quad (1.5)$$

Неравенство (1.5) показывает, что точка x_1 принадлежит отрезку $[c - \delta, c + \delta]$ и расположена ближе к точке c чем x_0 .

Продолжим построение итерационной последовательности. Вычислим $x_2 = \varphi(x_1)$. При этом

$$|x_2 - c| = |\varphi(x_1) - \varphi(c)| \leq L|x_1 - c| \leq L^2|x_0 - c| \leq L^2\delta.$$

Точка x_2 тоже принадлежит отрезку $[c - \delta, c + \delta]$ и расположена ближе к точке c чем x_1 .

На второй итерации мы опять приблизились к c .

По индукции легко доказать, что все последующие итерации также существуют и удовлетворяют неравенствам

$$|x_n - c| \leq L^n|x_0 - c| \leq L^n\delta. \quad (1.6)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - c) = 0, \text{ т. е. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c. \quad (1.7)$$

Нам остается доказать, что корень $x = c$ является единственным решением уравнения (1.1) на отрезке $[c - \delta, c + \delta]$. Действительно, предположим, что существует еще один корень $x = c_1$

$$c_1 = \varphi(c_1), \quad c - \delta \leq c_1 \leq c + \delta. \quad (1.8)$$

Примем c_1 за нулевое приближение и будем строить итерационную последовательность (1.2). С учетом (1.8) получим $x_n = c_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, K$. С другой стороны, по доказанному $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, т. е. $c_1 = c$. Никаких других решений, кроме $x = c$, уравнение (1.1) на рассматриваемом отрезке не имеет.

Доказанная теорема имеет простой смысл. Будем говорить, что функция $\varphi(x)$ осуществляет отображение точки x отрезка $[c - \delta, c + \delta]$ на точку $y = \varphi(x)$. Рассмотрим пару точек x_1, x_2 и их образы y_1, y_2 . Условие Липшица (1.3) приводит к тому, что расстояние между образами оказывается меньше расстояния между исходными точками, т. е. отображение $y = \varphi(x)$ является сжимающим. Корень c - неподвижная точка отображения: $c = \varphi(c)$. В результате каждый шаг в итерационном процессе, сжимая расстояние, приближает очередную итерацию к корню.

Центральная идея метода итераций – сжимающие отображения – является весьма общей. Например, одно из доказательств теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений основано на методе последовательных приближений в условиях, когда действует принцип сжимающих отображений. Для многих сложных нелинейных задач принцип сжимающих отображений оказывается основным методом исследования.

Пример решения уравнений методом итераций

Записать уравнение $f(x) = x - \cos x = 0$ в виде

$$x = \cos x, \quad (1.9)$$

и найти приближенное значение его корня методом итераций.

Пример решения уравнений методом итераций

Записать уравнение $f(x) = x - \cos x = 0$ в виде

$$x = \cos x, \quad (1.9)$$

и найти приближенное значение его корня методом итераций.

В данном случае

$$\varphi(x) = \cos x, \quad \varphi'(x) = -\sin x.$$

На отрезке $[0, 1]$, на котором расположен корень уравнения (1.9), для модуля производной справедлива оценка

$$|\varphi'(x)| \leq \sin 1 < 0.85$$

Она обеспечивает выполнение условия Липшица с константой Липшица $L = 0.85$.

Результаты вычислений по рекуррентной формуле

$$x_{n+1} = \cos x_n$$

даны в таблице 1. За нулевое приближение выбрана средняя точка отрезка $x_0 = 0.5$. Для удобства анализа итерационной последовательности ее члены расположены по два в строке. В результате образовались столбцы членов с четными и нечетными номерами. Сравнивая их между собой, мы видим, что четные члены меньше нечетных: итерационная последовательность «скачет» то вверх, то вниз. С возрастанием номера четные члены последовательности возрастают, а нечетные убывают, приближаясь друг к другу. Такое поведение последовательности означает, что корень уравнения лежит между ними. Четные члены дают его значение с недостатком, нечетные – с избытком. Это позволяет легко контролировать точность, достигнутую после любого числа итераций: погрешность не превышает разности между последним нечетным и четным членами. Мы остановили процесс вычислений на 19-ой итерации и можем написать для корня C двойное неравенство

$$x_{18} = 0.738912449332 < c < x_{19} = 0.739201444135$$

или, отбрасывая лишние десятичные знаки,

$$0.73891 < c < 0.73921.$$

Таким образом, члены итерационной последовательности x_{18} и x_{19} определяют c с недостатком и с избытком с погрешностью, которая не превышает разности $x_{19} - x_{18}$:

$$\varepsilon < \Delta_{19} = x_{19} - x_{18} < 0.0003.$$

n	x_{2n}	x_{2n+1}
0	0,500000000000	0,877582561890
1	0,639012494165	0,802685100682
2	0,694778026788	0,768195831282
3	0,719165445942	0,752355759422
4	0,730081063138	0,745120341351
5	0,735006309015	0,741826522643
6	0,737235725442	0,740329651878
7	0,738246238332	0,739649962770
8	0,738704539357	0,739341452281
9	0,738912449332	0,739201444136

1. Постановка задачи решения уравнений

Пусть имеется уравнение вида $f(x)=0$, где $f(x)$ – алгебраическая или трансцендентная функция.

Решить такое уравнение – значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значения корней (с указанной точностью). Ограничимся обсуждением методов поиска лишь *действительных* корней, не затрагивая проблему корней комплексных.

Наряду с методом половинного деления существуют и другие, более сложные и более эффективные итерационные методы. Прежде всего, к ним относится группа методов, которые связаны с именем Ньютона. Рассмотрим два из них – *метод касательных* и *метод хорд*.

Оба метода основаны на следующем приеме.

Пусть уравнение $f(x)=0$ имеет единственный корень на отрезке $[a;b]$. Преобразуем его к равносильному уравнению

$$x = x - \varphi(x) \cdot f(x), \quad (2.1)$$

где $\varphi(x)$ – любая функция, определенная на отрезке $[a;b]$ и не обращающаяся на нем в нуль. Осуществляя различными способами выбор $\varphi(x)$, можно получить, в частности, и указанные методы.

2. Метод касательных

Пусть в (2.1) $\varphi(x) = \frac{1}{f'(x)}$. Таким образом, итерационная последовательность строится с помощью рекуррентного соотношения

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) Является дважды дифференцируемой на отрезке $[a;b]$;
- 2) Обе производные – первая и вторая – не меняют знак на этом отрезке, т.е. функция $F(x)$ монотонна и не меняет характер выпуклости.

В такой ситуации за x_0 берется тот конец отрезка $[a;b]$, на котором функция $f(x)$ и ее вторая производная имеют одинаковые знаки, т.е. выполняется условие $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

На каждом шаге построения итерационной последовательности будет проверять точность достижения корня с помощью неравенства:

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad m = \min_{[a,b]} |f'(x)|. \quad (2.3)$$

Рассмотренный метод называется *методом касательных* потому, что если обратиться к графической иллюстрации, то точка x_1 , определяемая по формуле (2.2) при $n=0$, есть точка пересечения касательной, проведенной к графику $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 , определяемой предыдущим членом последовательности, с осью абсцисс.



Каждому следующему члену итерационной последовательности (2.2) соответствует точка пересечения касательной, проведенной к графику $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 , с осью абсцисс.

3. Пример решения уравнений методом касательных

Пример: Уточнить корень уравнения $\sin 2x - \ln x = 0$ на отрезке $[1,3;1,5]$ методом касательных с точностью до $1 \cdot 10^{-4}$.

Решение: Формула (2.2) в нашем примере имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin 2x_n - \ln x_n}{2 \cos 2x_n - 1/x_n},$$

т.к. производная $f'(x) = (\sin 2x - \ln x)' = 2 \cos 2x - \frac{1}{x}$.

Для определения точки x_0 найдем знаки $f(x) = \sin 2x - \ln x$ и $f''(x) = -4 \cos 2x + 1/x^2$ на концах отрезка $[1,3;1,5]$:

$$f(1,3) = 0,515501 - 0,262363 = 0,253137 > 0,$$

$$f(1,5) = 0,14112 - 0,405465 = -0,26435 < 0,$$

$$f''(1,3) = -2,062 + 0,591716 = -1,4703 < 0,$$

$$f''(1,5) = -0,56448 + 0,4444 = -0,12 < 0.$$

Таким образом, $x_0 = 1,5$.

Вычислим несколько членов итерационной последовательности «ручным» способом:

$$x_1 = 1,5 - \frac{\sin(2 \cdot 1,5) - \ln 1,5}{2 \cos(2 \cdot 1,5) - \frac{1}{1,5}} = 1,5 - \frac{-0,26435}{-1,97998 - 0,66667} = 1,400119$$

Сделаем проверку (2.3) точности достижения корня:

$$m = \min_{[a,b]} |f'(x)|, \quad f'(1,3) \approx -2,48, \quad f'(1,5) \approx -2,65, \text{ значит } m = 2,4.$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x)|}{m} = \frac{|\sin(2 \cdot 1,400119) - \ln(1,400119)|}{2,4} = \frac{|0,334763 - 0,336557|}{2,4} = 0,000747 > 0,0001 -$$

требуемая точность не достигнута.

$$x_2 = 1,400119 - \frac{\sin(2 \cdot 1,400119) - \ln(1,400119)}{2 \cos(2 \cdot 1,400119) - \frac{1}{1,400119}} = 1,399429$$

Снова проверка:

$$\frac{|f(x_2)|}{m} = \frac{|\sin(2 \cdot 1,399429) - \ln(1,399429)|}{2,4} = \frac{|0,33606395 - 0,336064|}{2,4} = \frac{0,000005}{2,4} < 0,0001 -$$

требуемая точность достигнута.

Корень уравнения $x_1 = 1,399429$.

4. Метод хорд

Реализуя метод касательных, при каждой итерации необходимо вычислить значение не только функции $f(x)$, но и ее производной $f'(x)$. Однако есть вариант метода Ньютона, в котором можно ограничиться вычислением только значений $f(x)$, что иногда упрощает вычислительный алгоритм.

Если положить в (2.1) $\varphi(x) = \frac{x - c}{f(x) - f(c)}$, а в качестве c взять тот конец промежутка $[a; b]$, на котором $f(c) \cdot f''(c) > 0$, то приходим к итерационному методу:

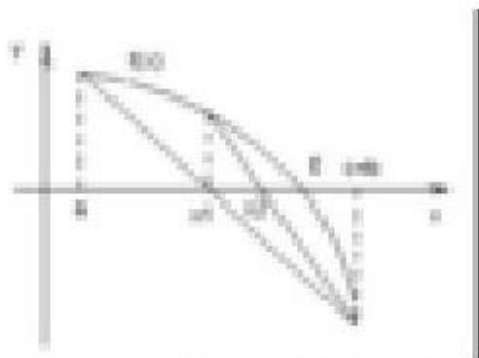
$$x_{n+1} = \frac{cf'(x_n) - x_n f(c)}{f(x_n) - f(c)}, \quad (2.4)$$

называемому *методом хорд* (или *методом секущих*).

В качестве x_0 в этом случае следует принять тот конец промежутка $[a; b]$, который остался после выбора c (т.е. если $c=a$, то $x_0=b$ или наоборот). Далее последовательность строится по формуле (2.4).

Оценка степени приближения к корню возможна с помощью неравенства (2.3).

На рисунке проиллюстрирован геометрический смысл метода.



В данном случае $c=b$, $x_0=a$, x_1 соответствует точке пересечения хорды, соединяющей концы кривой, с осью абсцисс. Далее находится точка на кривой с абсциссой x_1 , проводится следующая хорда и т.д.

5. Пример решения уравнений методом касательных

Пример: Уточнить корень уравнения $\sin 2x - \ln x = 0$ на отрезке $[1,3;1,5]$ методом хорд с точностью до $1 \cdot 10^{-4}$.

Решение: Точка c выбирается так же, как и точка x_0 в предыдущем примере, т.е. $c=1,5$. Будем приближать точку $x_0 = a = 1,3$.

$$x_1 = \frac{cf(x_0) - x_0f(c)}{f(x_0) - f(c)} = \frac{1.5(\sin(2 \cdot 1.3) - \ln 1.3) - 1.3(\sin(2 \cdot 1.5) - \ln 1.5)}{(\sin(2 \cdot 1.3) - \ln 1.3) - (\sin(2 \cdot 1.5) - \ln 1.5)} \approx 1.397834$$

Проверим, достигнута ли заданная точность.

$$\frac{|f(x_1)|}{m} = \frac{|\sin(2 \cdot 1.397834) - \ln 1.397834|}{2,4} \approx 0.002 > 10^{-4} - \text{требуемая точность не достигнута.}$$

Найдём следующее приближение:

$$x_2 = \frac{cf(x_1) - x_1f(c)}{f(x_1) - f(c)} = \frac{1.5(\sin(2 \cdot 1.397834) - \ln 1.397834) - 1.397834(\sin(2 \cdot 1.5) - \ln 1.5)}{(\sin(2 \cdot 1.397834) - \ln 1.397834) - (\sin(2 \cdot 1.5) - \ln 1.5)} \approx 1.399410$$

Проверим точность:

$$\frac{|f(x_2)|}{m} = \frac{|\sin(2 \cdot 1.39941) - \ln(1.39941)|}{2,4} \approx 0.00002 < 10^{-4} - \text{требуемая точность достигнута}$$

Итак, корень уравнения $x=1,39941$.

Этапы выполнения работы:

Задание 1.

По методу половинного деления вычислите один корень заданного уравнения с точностью 10^{-3} с помощью «ручной» расчетной таблицы и калькулятора.

Номер варианта	Уравнение	Пояснения
1	$(0,2x)^3 = \cos x$	-
2	$x - 10 \sin x = 0$	-
3	$2^{-x} = \sin x$	При $x < 10$
4	$2^x - 2 \cos x = 0$	При $x > -10$
5	$\lg(x+5) = \cos x$	При $x < 5$
6	$\sqrt{4x+7} = 3 \cos x$	-
7	$x \sin x - 1 = 0$	-
8	$8 \cos x - x = 6$	-
9	$\sin x - 0,2x = 0$	-
10	$10 \cos x - 0,1x^2 = 0$	-
11	$2 \lg(x+7) - 5 \sin x = 0$	-
12	$4 \cos x + 0,3x = 0$	-
13	$\sqrt{1-x} = 5 \sin 2x$	-
14	$2x^2 - 5 = 2^x$	-
15	$10 - 0,5x^2 = 2^{-x}$	-

Задание 2.

Методом итераций вычислите один корень заданного уравнения с точностью 10^{-3} с помощью «ручной» расчетной таблицы и калькулятора.

Номер варианта	Уравнение	Пояснения
1	$(0,2x)^3 = \cos x$	-
2	$x - 10 \sin x = 0$	-
3	$2^{-x} = \sin x$	При $x < 10$
4	$2^x - 2 \cos x = 0$	При $x > -10$
5	$\lg(x+5) = \cos x$	При $x < 5$
6	$\sqrt{4x+7} = 3 \cos x$	-
7	$x \sin x - 1 = 0$	-
8	$8 \cos x - x = 6$	-
9	$\sin x - 0,2x = 0$	-
10	$10 \cos x - 0,1x^2 = 0$	-
11	$2 \lg(x+7) - 5 \sin x = 0$	-
12	$4 \cos x + 0,3x = 0$	-
13	$\sqrt{1-x} = 5 \sin 2x$	-
14	$2x^2 - 5 = 2^x$	-
15	$10 - 0,5x^2 = 2^{-x}$	-

Задание 3.

По методу касательных вычислите один корень заданного уравнения с точностью 10^{-3} с помощью «ручной» расчетной таблицы и калькулятора.

Номер варианта	Уравнение	Пояснения
1	$(0,2x)^3 = \cos x$	-
2	$x - 10 \sin x = 0$	-
3	$2^{-x} = \sin x$	При $x < 10$
4	$2^x - 2 \cos x = 0$	При $x > -10$
5	$\lg(x+5) = \cos x$	При $x < 5$

6	$\sqrt{4x+7} = 3 \cos x$	-
7	$x \sin x - 1 = 0$	-
8	$8 \cos x - x = 6$	-
9	$\sin x - 0,2x = 0$	-
10	$10 \cos x - 0,1x^2 = 0$	-
11	$2 \lg(x+7) - 5 \sin x = 0$	-
12	$4 \cos x + 0,3x = 0$	-
13	$\sqrt{1-x} = 5 \sin 2x$	-
14	$2x^2 - 5 = 2^x$	-
15	$10 - 0,5x^2 = 2^{-x}$	-

Критерии оценивания:

«Отлично» (90 -100% правильно выполненных заданий)

«Хорошо» (72 – 89 % правильно выполненных заданий)

«Удовлетворительно» (61 -71 % правильно выполненных заданий)

«Неудовлетворительно» (<60 % правильно выполненных заданий)

Практическое занятие № 6

Тема раздела: Решение систем линейных алгебраических уравнений

Тема практического занятия: Метод Гаусса

Цель: - закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;

- закрепить умения решать системы линейных уравнений методом Гаусса;
- закрепить умения находить значения определителя системы методом Гаусса;
- закрепить умения находить обратную матрицу методом Гаусса.

Планируемые результаты:

уметь: выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи;

знать: методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.

Материально-техническое и комплексно-методическое обеспечение: Рабочая тетрадь, методическое пособие по выполнению практических работ по дисциплине «Численные методы», калькулятор

Методы обучения: перцептивный аспект

Форма организации учебной деятельности: практическое занятие

Время выполнения: 180 минут

Вопросы для проверки готовности обучающихся к практическому занятию:

1. Какие методы решения с.л.а.у. вы знаете?
2. В чем заключается прямой и обратный ход в схеме единственного деления?
3. На чем основываются подходы к организации контроля вычислений в прямом ходе, обратном ходе?
4. На чем основываются алгоритмы вычисления определителя по методу Гаусса?
5. Каким образом схема единственного деления может использоваться для вычисления обратной матрицы?

Форма отчетности по занятию: письменная работа

Последовательность выполнения работы

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Краткие теоретические сведения:

Сам по себе метод Гаусса относится к точным методам. Это означает, что если точно выполнять все требуемые действия, получено точное решение, поскольку погрешность метода в данном случае равна нулю.

Будем считать матрицу системы (3.1) невырожденной, т.е. ее определитель не равен нулю.

Рассмотрим алгоритм, который получил название схемы единственного деления.

Подвергнем систему (3.1) следующим преобразованиям.

Считая, что $a_{11} \neq 0$ (ведущий элемент), разделим на a_{11} коэффициенты первого уравнения: $x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1$ (3.2)

Используя уравнение (3.2), легко исключить неизвестное x_1 из остальных уравнений системы (достаточно из каждого уравнения вычесть уравнение (3.2), умноженное на соответствующий коэффициент при x_1).

Над остальными уравнениями системы совершим аналогичное преобразование: выберем из их числа уравнение с ведущим элементом и исключим с его помощью из остальных уравнений неизвестное x_2 .

Повторяя этот процесс, получим систему с треугольной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1; \\ x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \beta_2; \\ x_n = \beta_n. \end{cases} \quad (3.3)$$

Из системы (3.3) последовательно находим значения неизвестных x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 .

Отметим, что последовательное исключение неизвестных называется *прямым ходом метода Гаусса*. Нахождение значений неизвестных – *обратным ходом*.

Пример: Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41; \\ 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44; \\ 3,92x_1 - 7,99x_2 + 8,37x_3 = 55,56. \end{cases}$$

Решение: Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2,34 & -4,21 & -11,61 & 14,41 \\ 8,04 & 5,22 & 0,27 & -6,44 \\ 3,92 & -7,99 & 8,37 & 55,56 \end{array} \right)$$

Так как, $a_{11} = 2,34 \neq 0$, разделим элементы первой строки на 2,34. Затем из элементов второй строки вычтем элементы первой, умноженные на 8,04, а из элементов третьей - вычтем элементы первой, умноженные на 3,92.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,799 & -4,962 & 6,158 \\ 0 & 19,685 & 40,161 & -55,951 \\ 0 & -0,938 & 27,819 & 31,42 \end{array} \right)$$

Теперь элементы второй строки разделим на 19,685. И умножая их на (-0,938), вычтем из элементов третьей строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,799 & -4,962 & 6,158 \\ 0 & 1 & 2,04 & -2,842 \\ 0 & 0 & 29,732 & 28,756 \end{array} \right)$$

Элементы третьей строки, разделим на 29,732.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,799 & -4,962 & 6,156 \\ 0 & 1 & 2,04 & -2,842 \\ 0 & 0 & 1 & 0,967 \end{array} \right)$$

Получаем треугольную матрицу. Решая ее, начиная с последней строки, найдем значения неизвестных:

$$\begin{aligned}
x_3 &= 0,967, \\
x_2 + 2,04x_3 &= -2,842, \\
x_2 &= -2,842 - 2,04 \cdot 0,962, \\
x_2 &= -4,816, \\
x_1 - 1,799 \cdot x_2 - 4,962 \cdot x_3, \\
x_1 &= 6,156 + 4,962 \cdot 0,967 + 1,799 \cdot (-4,816), \\
x_1 &= 2,293.
\end{aligned}$$

Так как в процессе решения выполнялись округления, то решение содержит вычислительную ошибку.

Определение: Значение разностей между свободных элементов исходной системы и результатами подстановки в уравнения системы найденных значений неизвестных называется *невязками*.

В рассмотренном примере невязки имеют следующие значения:

$$\varepsilon_1 = 14,41 - 14,411 = -0,001, \quad \varepsilon_2 = -6,44 - (-6,441) = 0,001, \quad \varepsilon_3 = 55,56 - (55,561) = 0,001.$$

Следует заметить, что по величине невязок нельзя судить о погрешностях результатов, но можно уточнить решение системы, вычислив поправки для найденных значений неизвестных.

3. Вычисление определителей матриц

Приступая к рассмотрению процесса решения системы линейных уравнений методом Гаусса, делается оговорка, что система невырожденная, т.е. её определитель отличен от нуля.

Вычисление определителя может представлять и самостоятельный интерес, т.к. такая задача нередко встречается в высшей математике.

Рассмотрим алгоритм вычисления определителя в связи с решением с.л.а.у. методом Гаусса по схеме единственного деления.

Обозначим определитель системы через D .

Что происходит с ним на каждом шаге реализации метода Гаусса?

$$1) D / a_{11};$$

$$2) D / a_{11} \cdot a_{22}^{(1)};$$

.....

$$n) D / (a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)}).$$

Матрица коэффициентов при неизвестных системы, полученная в результате - треугольная, с единицами по главной диагонали. Поэтому её определитель равен 1.

Практический вывод:

Если необходимо вычислить определитель некоторой квадратной матрицы, надо решить систему уравнений с этой матрицей и произвольной правой частью и воспользоваться

$$\text{формулой: } D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)}.$$

4. Применение метода Гаусса для вычисления обратной матрицы

Схема единственного деления может использоваться также и для вычисления элементов матрицы A^{-1} , обратной для невырожденной матрицы A . По определению, $AA^{-1} = E$, где E - единичная матрица.

Представим искомую матрицу A^{-1} и единичную матрицу E в виде совокупности векторов-столбцов. В такой записи соотношение $AA^{-1} = E$ предстанет в виде совокупности из n систем линейных уравнений вида $Ax^{(i)} = e^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$.

Решение каждой системы дает соответствующий столбец обратной матрицы.

Расширив таблицу схемы единственного деления, можно проиллюстрировать получение обратной матрицы рассмотренным методом.

5. Пример нахождения обратной матрицы методом Гаусса

Пример: Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2,34 & -4,21 & -11,61 \\ 8,04 & 5,22 & 0,27 \\ 3,92 & -7,99 & 8,37 \end{pmatrix}$$

Найти обратную матрицу, пользуясь схемой единственного деления.

Решение:

Запишем данную и единичную матрицы в одну, и применим, к ним одновременно, элементарные преобразования схемы единственного деления:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2,34 & -4,21 & -11,61 & 1 & 0 & 0 \\ 8,04 & 5,22 & 0,27 & 0 & 1 & 0 \\ 3,92 & -7,99 & 8,37 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Так как, $a_{11} = 2,34 \neq 0$, разделим элементы первой строки на 2,34. Затем из элементов второй строки вычтем элементы первой, умноженные на 8,04, а из элементов третьей - вычтем элементы первой, умноженные на 3,92.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & -4,9615 & 0,4274 & 0 & 0 \\ 0 & 19,6848 & 40,1605 & -3,4363 & 1 & 0 \\ 0 & -0,9388 & 27,8191 & -1,6741 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Теперь элементы второй строки разделим на 19,685. И умножая их на (-0,938), вычтем из элементов третьей строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & -4,9615 & 0,4274 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2,0401 & -0,1746 & 0,0508 & 0 \\ 0 & 0 & 29,7318 & -1,8391 & 0,0476 & 1 \end{array} \right).$$

Элементы третьей строки, разделим на 29,732.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & -4,9615 & 0,4274 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2,0401 & -0,1746 & 0,0508 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0619 & 0,0016 & 0,0336 \end{array} \right).$$

Из элементов второй строки вычтем элементы третьей, умноженные на 2,0401.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & -4,9615 & 0,4274 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0,0483 & 0,0475 & -0,0686 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0619 & 0,0016 & 0,0336 \end{array} \right).$$

Из элементов первой строки вычтем элементы третьей, умноженные на (-4,9615).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & 0 & 0,1203 & 0,0079 & 0,1667 \\ 0 & 1 & 0 & -0,0483 & 0,0475 & -0,0686 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0619 & 0,0016 & 0,0336 \end{array} \right).$$

Из элементов первой строки вычтем элементы второй, умноженные на (-1,7991).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0,0334 & 0,0934 & 0,0433 \\ 0 & 1 & 0 & -0,0483 & 0,0475 & -0,0686 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0619 & 0,0016 & 0,0336 \end{array} \right).$$

Матрица, полученная справа и является искомой обратной матрицей:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0334 & 0,0934 & 0,0433 \\ -0,0483 & 0,0475 & -0,0686 \\ -0,0619 & 0,0016 & 0,0336 \end{pmatrix}.$$

Сделаем прямую проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{1,0041} & -0,0088 & -0,0270 \\ 0,0000 & \underline{0,9994} & -0,0033 \\ -0,0002 & 0,0005 & \underline{1,003} \end{pmatrix}$$

Поскольку вычисления матрицы A^{-1} велись с округлением, то наличие невязок, отражённых в матрице AA^{-1} , является естественным.

Этапы выполнения работы:

Задание 1.

Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Решить систему методом Гаусса, используя «ручную» схему единственного деления:

расчеты выполняйте с тремя знаками после запятой (с применением калькулятора);

подставьте найденные решения в исходную систему, вычислите невязки и сравните полученные решения;

выбрав ведущие элементы схемы единственного деления, найдите значения определителя системы;

для матрицы системы, по схеме единственного деления, найдите обратную матрицу.

Номер варианта	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
1	1	0,21	-0,45	-0,20	1,91
	2	0,30	0,25	0,43	0,32
	3	0,60	-0,35	-0,25	1,83
2	1	-3	0,5	0,5	-56,5
	2	0,5	-6,0	0,5	-100
	3	0,5	0,5	-3	-210
3	1	0,45	-0,94	-0,15	-0,15
	2	-0,01	0,34	0,06	0,31
	3	-0,35	0,05	0,63	0,37
4	1	0,63	0,05	0,15	0,34
	2	0,15	0,10	0,71	0,42
	3	0,03	0,34	0,10	0,32
5	1	-0,20	1,60	-0,10	0,30
	2	-0,30	0,10	-1,50	0,40
	3	1,20	-0,20	0,30	-0,60
6	1	0,30	1,20	-0,20	-0,60
	2	-0,10	-0,20	1,60	0,30
	3	0,05	0,34	0,10	0,32
7	1	0,20	0,44	0,81	0,74
	2	0,58	-0,29	0,05	0,02
	3	0,05	0,34	0,10	0,32

8	1	6,36	11,75	10	-41,40
	2	7,42	19,03	11,75	-49,49
	3	5,77	7,48	6,36	-27,67
9	1	-9,11	1,02	-0,73	-1,25
	2	7,61	6,25	-2,32	2,33
	3	-4,64	1,13	-8,88	-3,75
10	1	-9,11	-1,06	-0,67	-1,56
	2	7,61	6,35	-2,42	2,33
	3	-4,64	1,23	-8,88	-3,57
11	1	1,02	-0,73	-9,11	-1,25
	2	6,25	-2,32	7,62	2,33
	3	1,13	-8,88	4,64	-3,75
12	1	0,06	0,92	0,03	-0,82
	2	0,99	0,01	0,07	0,66
	3	1,01	0,02	0,99	-0,98
13	1	0,10	-0,07	-0,96	-2,04
	2	0,04	-0,99	-0,85	-3,73
	3	0,91	1,04	0,19	-1,67
14	1	0,62	0,81	0,77	-8,18
	2	0,03	-1,11	-1,08	0,08
	3	0,97	0,02	-1,08	0,06
15	1	0,63	-0,37	1,76	-9,29
	2	0,90	0,99	0,05	0,12
	3	0,13	-0,95	0,69	0,69

Критерии оценивания:

«Отлично» (90 -100% правильно выполненных заданий)

«Хорошо» (72 – 89 % правильно выполненных заданий)

«Удовлетворительно» (61 -71 % правильно выполненных заданий)

«Неудовлетворительно» (<60 % правильно выполненных заданий)

Практическое занятие № 7

Тема раздела: Решение систем линейных алгебраических уравнений

Тема практического занятия: Метод итераций решения СЛАУ

Цель: - закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;

- закрепить умения решать системы линейных уравнений приближенными методами (метод простой итерации, метод Зейделя).

Планируемые результаты:

уметь: выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи;

знать: методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.

Материально-техническое и комплексно-методическое обеспечение: Рабочая тетрадь, методическое пособие по выполнению практических работ по дисциплине «Численные методы», калькулятор

Методы обучения: перцептивный аспект

Форма организации учебной деятельности: практическое занятие

Время выполнения: 90 минут

Вопросы для проверки готовности обучающихся к практическому занятию:

1. Каким образом система линейных уравнений преобразуется к итерационному виду?
2. Как сформулировать условие сходимости итерационного процесса?
3. Как привести исходную систему линейных уравнений к системе с преобладающими диагональными элементами?
4. Постройте блок-схему решения системы линейных уравнений методом простой итерации.
5. В чем состоит отличие метода Зейделя от аналогичного процесса простой итерации?
6. Постройте блок-схему решения системы линейных уравнений методом Зейделя

Форма отчетности по занятию: письменная работа

Последовательность выполнения работы

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Краткие теоретические сведения:

1. Метод простой итерации

Как отмечалось ранее, итерационные методы используются для решения уравнений и систем любой природы. Рассмотрим, как это делается применительно к системам линейных алгебраических уравнений.

Приведём систему линейных алгебраических уравнений (3.1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

к равносильной ей системе вида $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

[illegible]

В сокращенной форме: $x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i, \quad i = \overline{1, n}.$

О системе (3.4) говорят, что она «приведена к нормальному виду».

Правая часть системы определяет отображение $F: y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i$ (3.5),

переводящее точку $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точку $\bar{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Используя отображения (3.5) и выбрав начальную точку $\bar{x}^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ можно построить итерационную последовательность точек.

Если отображение F является сжимающим, то эта последовательность сходится и её предел является решением системы (3.4) а, следовательно, и решением исходной системы (3.1).

Замечание: Отображение является *сжимающим*, если расстояние между образами меньше, чем расстояние между исходными точками.

Для отображения (3.5) необходимым и достаточным условием сжимаемости является

следующее: $\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$, (3.6),

т.е. максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (3.4), взятых по столбцам, должен быть меньше 1.

Практическая схема решения с.л.у. методом простой итерации

С.л.у. (3.1) необходимо привести к нормальному виду (3.4).

Для обеспечения сходимости итерационной последовательности необходимо, чтобы коэффициенты α_{ij} при неизвестных в правой части системы были существенно меньше 1.

Этого можно достичь, если исходную систему (3.1) с помощью равносильных преобразований привести к системе, у которой абсолютная величина коэффициентов, стоящих на главной диагонали, больше абсолютных величин каждого из других коэффициентов, стоящих при неизвестных в соответствующих уровнях (такую систему называют *системой с преобладающими диагональными коэффициентами*). Если теперь разделить все уравнения на соответствующие диагональные коэффициенты и выразить из каждого уравнения неизвестное с коэффициентом, равным 1, будет получена система (3.4), у которой все $|\alpha_{ij}| < 1$.

Для проверки точности решения используем условие (3.6).

2. Пример решения систем линейных уравнений методом простой итерации

Пример: Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41, \\ 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44, \\ 3,92x_1 - 7,99x_2 + 8,37x_3 = 55,56. \end{cases}$$

методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$.

Решение:

Построим систему с преобладающими диагональными коэффициентами.

В качестве 1-ого уравнения возьмем 2-ое, в качестве 3-его уравнения – 1-ое, в качестве 2-ого уравнения – сумму 1-го и 2-го уравнений:

$$\begin{cases} 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44, \\ 6,26x_1 - 12,2x_2 - 3,24x_3 = 69,97, \\ 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41. \end{cases}$$

Разделим каждое из полученных уравнений на диагональный коэффициент и, выразим из каждого уравнения диагональные элементы:

$$\begin{cases} x_1 = -0,649x_2 - 0,034x_3 - 0,801, \\ x_2 = 0,573x_1 - 0,266x_3 - 5,735, \\ x_3 = 0,202x_1 - 0,363x_2 - 1,241. \end{cases}$$

3. Метод Зейделя

Будем снова рассматривать систему линейных уравнений (3.1) и эквивалентную ей систему (3.4).

При решении системы (3.4) методом простой итерации каждый шаг итерационного процесса состоит в переходе от уже имеющегося приближения значений неизвестных к новому (очередному) приближению.

Обозначим элементы имеющегося приближения через x_1, x_2, \dots, x_n , а элементы очередного (вычисляемого) приближения через y_1, y_2, \dots, y_n .

Вычислительные формулы имеют вид:

$$y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Основная идея метода Зейделя состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса при вычислении значения y_i учитываются уже полученные значения y_1, y_2, \dots, y_{i-1} . Выпишем соответствующие вычислительные формулы:

$$y_1 = \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j + \beta_1,$$

$$y_2 = \alpha_{21} y_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} x_j + \beta_2,$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} y_j + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i$$

$$y_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} y_j + \alpha_{nn} x_n + \beta_n$$

Справедливо следующее утверждение:

Если для матрицы коэффициентов системы (3.4) выполняется условие (3.6), то итерационный процесс метода Зейделя сходится к решению системы при любом выборе начального приближения $x^{(0)}$.

Преимущество этого метода состоит в том, что он обеспечивает более быструю сходимость, чем метод простой итерации.

Пример:

№	Матрица системы				Правая часть
1	0,401	0,301	0,000	0,000	0,122
	-0,029	-0,500	-0,018	0,000	-0,253
	0,000	-0,050	-1,400	-0,039	-0,988
	0,000	0,000	-0,007	-2,300	-2,082

Решение:

Метод прогонки

Решим систему линейных уравнений методом прогонки.

Он является модификацией метода Гаусса для частного случая системы уравнений с трехдиагональной матрицей, которые имеют следующий вид:

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 & = d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 & = d_2 \\ \dots & \dots \\ a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} & = d_i \\ \dots & \dots \\ a_m x_{m-2} + b_{m-1} x_{m-1} + c_{m-1} x_m & = d_{m-1} \\ a_m x_{m-1} + b_m x_m & = d_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0,401 & 0,301 & 0,000 & 0,000 & 0,122 \\ -0,029 & -0,500 & -0,018 & 0,000 & -0,253 \\ 0,000 & -0,050 & -1,400 & -0,039 & -0,988 \\ 0,000 & 0,000 & -0,007 & -2,300 & -2,082 \end{pmatrix}$$

Заданная система имеет трехдиагональную матрицу четвертого порядка и ее можно решать методом прогонки.

Из вида системы следует, что $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$, $i = 1, 2, 3, 4$. Следовательно, система имеет единственное решение и для ее решения можно применить метод прогонки.

Прямой ход прогонки.

Вычислим прогоночные коэффициенты:

1) Вычислим знаменатель

$$\gamma_1 = b_1 = 0,122,$$

$$\alpha_1 = -c_1 / \gamma_1 = -0,018 / 0,401 = -0,751,$$

$$\beta_1 = d_1 / \gamma_1 = 0,122 / 0,401 = 0,304$$

$$2) \gamma_2 = b_2 + a_2 \alpha_1 = -0,500 + (-0,029) \cdot (-0,751) = -0,478$$

$$\alpha_2 = -c_2 / \gamma_2 = -(-0,018) / (-0,478) = -0,038$$

$$\beta_2 = (d_2 - a_2 \beta_1) / \gamma_2 = (-0,253 + 0,029 \cdot 0,304) / (-0,478) = 0,511$$

$$\begin{aligned}
3) \quad \gamma_3 &= b_3 + a_3 \alpha_2 = -1,400 - 0,050 \cdot (-0,038) = -1,398, \\
\alpha_3 &= -c_3 / \gamma_3 = 0,039 / (-1,398) = -0,028, \\
\beta_3 &= (d_3 - a_3 \beta_2) / \gamma_3 = (-0,988 + 0,050 \cdot 0,511) / (-1,398) = 0,688
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad \gamma_4 &= b_4 + a_4 \alpha_3 = -2,300 - 0,007 \cdot (-0,028) = -2,290, \\
\alpha_4 &= -c_4 / \gamma_4 = 0, \\
\beta_4 &= (d_4 - a_4 \beta_3) / \gamma_4 = (-2,082 - 0 \cdot 0,688) / (-2,290) = 0,907
\end{aligned}$$

Обратный ход прогонки.

Находим значения неизвестных:

$$\begin{aligned}
x_4 &= \beta_4 = 0,907 \\
x_3 &= \alpha_3 x_4 + \beta_3 = -0,028 \cdot 0,907 + 0,688 = 0,663 \\
x_2 &= \alpha_2 x_3 + \beta_2 = -0,038 \cdot 0,663 + 0,511 = 0,486
\end{aligned}$$

$$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 = -0,751 \cdot 0,486 + 0,304 = -0,060$$

Ответ: $x_1 = -0,060$, $x_2 = 0,486$, $x_3 = 0,663$, $x_4 = 0,907$

Итерационный метод Метод Гаусса-Зейделя

Решим систему методом Гаусса-Зейделя

$$\begin{pmatrix} 0,401 & 0,301 & 0,000 & 0,000 & 0,122 \\ -0,029 & -0,500 & -0,018 & 0,000 & -0,253 \\ 0,000 & -0,050 & -1,400 & -0,039 & -0,988 \\ 0,000 & 0,000 & -0,007 & -2,300 & -2,082 \end{pmatrix}$$

Запишем исходную систему в виде:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{0,401} (0,122 - 0,301x_2) \\ x_2 = \frac{1}{-0,500} (-0,253 + 0,018x_3 + 0,029x_1) \\ x_3 = \frac{1}{-1,400} (-0,988 + 0,050x_2 + 0,039x_4) \\ x_4 = \frac{1}{-2,300} (-2,082 + 0,007 \cdot x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,304 - 0,751x_2 \\ x_2 = 0,506 - 0,036x_3 - 0,058x_1 \\ x_3 = 0,706 - 0,036x_2 - 0,028x_4 \\ x_4 = 0,905 - 0,003x_3 \end{cases}$$

В качестве начальных приближений возьмем нули, т.е. примем $x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$.

Найдем значения неизвестных на первой итерации:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,304 - 0,751x_2^{(0)} \\ x_2^{(1)} = 0,506 - 0,036x_3^{(0)} - 0,058x_1^{(1)} \\ x_3^{(1)} = 0,706 - 0,036x_2^{(1)} - 0,028x_4^{(0)} \\ x_4^{(1)} = 0,905 - 0,003x_3^{(1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,304 - 0,751 \cdot 0 = 0,304 \\ x_2^{(1)} = 0,506 - 0,036 \cdot 0 - 0,058 \cdot 0,304 = 0,488 \\ x_3^{(1)} = 0,706 - 0,036 \cdot 0,488 - 0,028 \cdot 0 = 0,688 \\ x_4^{(1)} = 0,905 - 0,003 \cdot 0,688 = 0,903 \end{cases}$$

Далее произведем вторую итерацию:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,304 - 0,751x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} = 0,506 - 0,036x_3^{(1)} - 0,058x_1^{(2)} \\ x_3^{(2)} = 0,706 - 0,036x_2^{(2)} - 0,028x_4^{(1)} \\ x_4^{(2)} = 0,905 - 0,003x_3^{(2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,304 - 0,751 \cdot 0,488 = -0,062 \\ x_2^{(2)} = 0,506 - 0,036 \cdot 0,688 - 0,058 \cdot (-0,062) = 0,485 \\ x_3^{(2)} = 0,706 - 0,036 \cdot 0,485 - 0,028 \cdot 0,903 = 0,663 \\ x_4^{(2)} = 0,905 - 0,003 \cdot 0,663 = 0,903 \end{cases}$$

Проверим точность:

$$\begin{cases} |x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = |-0,062 - 0,304| = 0,366 \\ |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = |0,488 - 0,485| = 0,003 \\ |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = |0,663 - 0,688| = 0,025 \\ |x_4^{(2)} - x_4^{(1)}| = |0,903 - 0,903| = 0 \end{cases}$$

$$\max\{0,366; 0,003; 0,025; 0\} = 0,366 > 0,001$$

Точность не достигнута.

Произведем третью итерацию:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0,304 - 0,751x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} = 0,506 - 0,036x_3^{(2)} - 0,058x_1^{(3)} \\ x_3^{(3)} = 0,706 - 0,036x_2^{(3)} - 0,028x_4^{(2)} \\ x_4^{(3)} = 0,905 - 0,003x_3^{(3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0,304 - 0,751 \cdot 0,485 = -0,060 \\ x_2^{(3)} = 0,506 - 0,036 \cdot 0,663 - 0,058 \cdot (-0,060) = 0,486 \\ x_3^{(3)} = 0,706 - 0,036 \cdot 0,486 - 0,028 \cdot (0,903) = 0,663 \\ x_4^{(3)} = 0,905 - 0,003 \cdot 0,663 = 0,903 \end{cases}$$

Проверим точность:

$$\begin{cases} |x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = |-0,060 - 0,062| = 0,002 \\ |x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = |0,486 - 0,485| = 0,001 \\ |x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = |0,663 - 0,663| = 0 \\ |x_4^{(3)} - x_4^{(2)}| = |0,903 - 0,903| = 0 \end{cases}$$

$$\max\{0,002; 0,001; 0; 0\} = 0,002 > 0,001$$

Точность не достигнута.

Произведем четвертую итерацию:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 0,304 - 0,751x_2^{(3)} \\ x_2^{(4)} = 0,506 - 0,036x_3^{(3)} - 0,058x_1^{(4)} \\ x_3^{(4)} = 0,706 - 0,036x_2^{(4)} - 0,028x_4^{(3)} \\ x_4^{(4)} = 0,905 - 0,003x_3^{(4)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 0,304 - 0,751 \cdot 0,486 = -0,060 \\ x_2^{(4)} = 0,506 - 0,036 \cdot 0,663 - 0,058 \cdot (-0,060) = 0,486 \\ x_3^{(4)} = 0,706 - 0,036 \cdot 0,486 - 0,028 \cdot (0,903) = 0,663 \\ x_4^{(4)} = 0,905 - 0,003 \cdot 0,663 = 0,903 \end{cases}$$

Проверим точность:

$$\begin{cases} |x_1^{(4)} - x_1^{(3)}| = |-0,060 - 0,060| = 0 \\ |x_2^{(4)} - x_2^{(3)}| = |0,486 - 0,486| = 0 \\ |x_3^{(4)} - x_3^{(3)}| = |0,663 - 0,663| = 0 \\ |x_4^{(4)} - x_4^{(3)}| = |0,903 - 0,903| = 0 \end{cases}$$

$$\max\{0; 0; 0; 0\} = 0 < 0,001$$

Точность достигнута.

Решение системы с точностью 0,001:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = -0,060 \\ x_2^{(4)} = 0,486 \\ x_3^{(4)} = 0,663 \\ x_4^{(4)} = 0,903 \end{cases}$$

Сравнение результатов

Метод	X1	X2	X3	X4
Гаусса-Зейделя	-0,060	0,486	0,663	0,903
Прогонки	-0,060	0,486	0,663	0,907

Этапы выполнения работы:**Задание 1.**

Решить систему линейных уравнений, коэффициенты которой приведены в таблице заданий методами прогонки, итерационным методом. Предварительно привести систему к треугольному виду.

Вариант	Матрица системы				Правая часть
1	-1,700	0,003	0,000	0,000	0,681
	0,002	0,800	0,001	0,000	0,480
	0,000	-0,002	-0,100	0,030	-0,802
	0,000	0,000	-0,003	-1,600	-1,007
	Матрица системы				Правая часть
2	-3,000	0,001	0,000	0,000	1,514
	-0,011	2,100	0,520	0,000	1,478
	0,000	0,005	1,200	0,600	1,083
	0,000	0,000	-0,010	-0,300	-1,007
	Матрица системы				Правая часть
3	4,300	0,217	0,000	0,000	2,663
	0,100	-3,400	-0,207	0,000	2,778
	0,000	0,090	2,500	0,197	2,533
	0,000	0,000	0,080	-1,600	1,928
	Матрица системы				Правая часть
4	-5,600	0,268	0,000	0,000	4,032
	0,147	4,700	0,271	0,000	4,313
	0,000	-0,150	-3,800	0,274	4,235

	0,000	0,000	0,153	2,900	3,797
	Матрица системы				Правая часть
5	-8,200	0,370	0,000	0,000	7,559
	0,234	7,300	5,600	0,000	8,175
	0,000	0,260	-0,340	0,422	8,421
	0,000	0,000	0,268	5,500	8,322
	Матрица системы				Правая часть
6	9,500	0,422	0,000	0,000	9,719
	0,278	8,601	0,459	0,000	10,500
	0,000	0,315	7,700	0,496	10,915
	0,000	0,000	0,351	6,803	10,978
	Матрица системы				Правая часть
7	10,800	-0,576	0,000	0,000	12,143
	0,321	9,900	7,300	0,000	13,089
	0,000	0,369	9,000	-6,060	13,674
	0,000	0,000	0,416	8,100	13,897
	Матрица системы				Правая часть
8	-1,100	0,528	0,000	0,000	14,830
	0,365	0,113	0,536	0,000	15,941
	0,000	-0,423	1,031	0,534	16,969
	0,000	0,000	0,481	-0,570	17,081
	Матрица системы				Правая часть
9	13,400	0,581	0,000	0,000	17,782
	-0,408	12,500	-0,650	0,000	19,593
	0,000	0,477	-11,600	0,781	19,974
	0,000	0,000	0,546	10,700	20,528

	Матрица системы				Правая часть
10	30,300	0,153	0,000	0,000	80,168
	0,975	-29,400	0,011	0,000	83,578
	0,000	0,117	-2,500	1,660	86,609
	0,000	0,000	10,700	27,600	89,278
	Матрица системы				Правая часть
11	0,161	0,332	0,000	0,000	86,814
	0,109	-0,301	-0,150	0,000	90,358
	0,000	-0,060	0,171	0,051	19,861
	0,000	0,000	0,145	-0,298	93,502
	Матрица системы				Правая часть
12	13,400	0,581	0,000	0,000	17,782
	-0,408	12,500	-0,650	0,000	19,593
	0,000	0,477	-11,600	0,781	19,974
	0,000	0,000	0,546	10,700	20,528

Критерии оценивания:

«Отлично» (90 -100% правильно выполненных заданий)

«Хорошо» (72 – 89 % правильно выполненных заданий)

«Удовлетворительно» (61 -71 % правильно выполненных заданий)

«Неудовлетворительно» (<60 % правильно выполненных заданий)

Практическое занятие № 8, 9

Тема раздела: Интерполирование и экстраполирование функций

Тема практического занятия: Построение многочлена Лагранжа. Построение интерполяционного полинома в форме Ньютона

Цель: - закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;

- закрепить умения составлять интерполяционные многочлены Лагранжа.

Планируемые результаты:

уметь: выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи;

знать: методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.

Материально-техническое и комплексно-методическое обеспечение: Рабочая тетрадь, методическое пособие по выполнению практических работ по дисциплине «Численные методы», калькулятор

Методы обучения: перцептивный аспект

Форма организации учебной деятельности: практическое занятие

Время выполнения: 180 минут

Вопросы для проверки готовности обучающихся к практическому занятию:

1. В каких случаях может потребоваться аппроксимация функций?
2. Какими критериями пользуются для определения «близости» функции?
3. На чем основывается доказательство существования и единственности интерполяционного многочлена для таблично заданной функции?
4. В какой форме строится интерполяционный многочлен Лагранжа?

Форма отчетности по занятию: письменная работа

Последовательность выполнения работы

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Краткие теоретические сведения:

1. Постановка задачи аппроксимации функций

В вычислительной математике нередко случается, когда одну функцию приходится заменять другой, более простой и удобной для дальнейшей работы. Такую задачу называют **аппроксимацией функций**.

Поводом для аппроксимации функции может послужить, в частности, табличный способ её задания. Предположим, что результате некоторого эксперимента для конечного набора значений x_i величины y из отрезка $[a; b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_j < \dots < x_n = b$ получен набор значений y_i величины y (таблица 1).

Решая эту с.л.у. относительно a_0, a_1, \dots, a_n получим аналитическое выражение многочлена (4.2).

Система (4.4) всегда будет иметь единственное решение, поскольку ее определитель не будет равен нулю. Отсюда и вытекает существование и единственность решения системы (4.4) и, следовательно, многочлена (4.2).

Интерполяция стандартно производится многочленами, степень которых на единицу меньше числа узлов.

3. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть функция $F(x)$ задана таблицей (4.1).

Построим многочлен $L_n(x)$, степень которого не выше, чем n , и для которого выполнены условия интерполяции

$$L_n(x_0) = y_0, \quad L_n(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad L_n(x_n) = y_n \quad (4.5)$$

Будем искать $L_n(x)$ в виде

$$L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + \dots + l_n(x) \quad (4.6),$$

где $l_i(x)$ - многочлен степени n , причем

$$l_i(x_k) = \begin{cases} y_i, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \quad (4.7).$$

Очевидно, что требования (4.7) с учётом (4.6) вполне обеспечивает выполнение условий (4.5). Многочлен $l_i(x)$ составим следующим образом:

$$l_i(x) = C_i (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) (x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) \quad (4.8)$$

C_i - коэффициент, значение которого найдем из первой части условия (3.7):

$$C_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Подставим C_i в (4.8) и далее с учётом (4.6) получим:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) (x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (4.9)$$

Это и есть **интерполяционный многочлен Лагранжа**.

По таблице исходной функции F формула (4.9) позволяет довольно просто составить «внешний вид» многочлена.

Пример: Построить интерполяционный многочлен для функции, заданной таблицей значений:

x	1	3	4
F(x)	12	4	6

Решение:

Из таблицы следует, что $n=2$ (на 1 меньше, чем узлов).

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

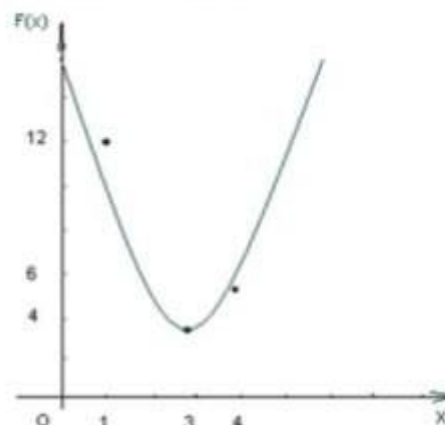
$$y_0 = 12, \quad y_1 = 4, \quad y_2 = 6$$

По формуле (3.9) получаем:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 12 \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} + 4 \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} + 6 \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} = \\ &= 12 \frac{(x^2 - 7x + 12)}{-2(-3)} + 4 \frac{(x^2 - 5x + 4)}{2(-1)} + 6 \frac{(x^2 - 4x + 3)}{3 \cdot 1} = \\ &= 2(x^2 - 7x + 12) - 2(x^2 - 5x + 4) + 2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 12x + 22. \end{aligned}$$

Таким образом, интерполяционный многочлен для заданной функции имеет вид $L_2(x) = 2x^2 - 12x + 22$.

Построим график $L_2(x)$ и точки в одной координатной плоскости.



Этапы выполнения работы:

Задание 1.

По заданной таблице значений функции

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y	y_0	y_1	y_2	y_3

составить формулу интерполяционного многочлена Лагранжа. Построить его график и отметить на нем узловые точки.

Задание 2.

Вычислить с помощью калькулятора одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа и оценить погрешность интерполяции.

Вариант	x_0	x_1	x_2	x_3	y_0	y_1	y_2	y_3	x
1	-1	0	3	4	-3	5	2	-6	3,8
2	2	3	5	6	4	1	7	2	3,5
3	0	2	3	5	-1	-4	2	-8	0,5
4	7	9	13	15	2	-2	3	-4	4,8
5	-3	-1	3	5	7	-1	4	-6	4,1
6	1	2	4	7	-3	-7	2	8	3,9
7	-1	-1	2	4	4	9	1	6	3,3
8	2	4	5	7	9	-3	6	-2	4,0
9	-4	-2	0	3	2	8	5	10	2,9
10	-1	1,5	3	5	4	-7	1	-8	5,3
11	2	4	7	8	-1	-6	3	12	4,1
12	-9	-7	-4	-1	3	-3	4	-9	7,6
13	0	1	4	6	7	-1	8	2	4,4
14	-8	-5	0	2	9	-2	4	6	2,5
15	-7	-5	-4	-1	4	-4	5	10	5,2

Критерии оценивания:

«Отлично» (90 -100% правильно выполненных заданий)

«Хорошо» (72 – 89 % правильно выполненных заданий)

«Удовлетворительно» (61 -71 % правильно выполненных заданий)

«Неудовлетворительно» (<60 % правильно выполненных заданий)

Практическое занятие № 10

Тема раздела: Интерполирование и экстраполирование функций

Тема практического занятия: Интерполяция сплайнами

Цель: - закрепить умения интерполировать функцию сплайнами и находить ее значение в заданной точке.

- овладеть вычислительными методами и практическими методами оценки погрешности вычислений.

Планируемые результаты:

уметь: выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи;

знать: методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.

Материально-техническое и комплексно-методическое обеспечение: Рабочая тетрадь, методическое пособие по выполнению практических работ по дисциплине «Численные методы», калькулятор

Методы обучения: перцептивный аспект

Форма организации учебной деятельности: практическое занятие

Время выполнения: 180 минут

Вопросы для проверки готовности обучающихся к практическому занятию:

1. Как ставится задача интерполяции?
2. Какие виды интерполяции вы знаете?
3. В чем суть и геометрический смысл линейной интерполяции?
4. Как выглядит оценка точности при интерполировании многочленом?
5. Что можно сказать об оценке погрешности при решении задачи интерполирования непрерывной функции, если не накладывать на нее никаких дополнительных ограничений?
6. Что такое сплайн-интерполяция и в чем ее суть?
7. Какие трудности возникают при интерполировании сплайнами?

Форма отчетности по занятию: письменная работа

Последовательность выполнения работы

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе. **Краткие теоретические сведения:**

1. Интерполирование сплайнами

При большом количестве узлов интерполяции сильно возрастает степень интерполяционных многочленов, что делает их неудобными для вычислений.

Высокой степени многочлена можно избежать, разбив отрезок интерполяции на несколько частей, с последующим построением на каждой части самостоятельного интерполяционного многочлена.

Однако такое интерполирование наталкивается на существенный недостаток: в точках стыка разных интерполяционных многочленов бывает разрывной их первая производная.

В этом случае удобно пользоваться особым видом кусочно-полиномиальной интерполяции - интерполяции **сплайнами**.

Суть этого подхода заключается в следующем:

Определение: Функция $S_m(x)$ называется *интерполяционным сплайном порядка m* для функции $f(x)$, заданной таблицей:

x	x_0	x_1	\dots	x_i	\dots	x_n
y	y_0	y_1	\dots	y_i	\dots	y_n

если:

1. на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ ($i=0, \dots, n-1$) $S(x)$ является многочленом порядка m ;
2. $S(x)$ и её производная до $(m-1)$ -го порядка включительно непрерывны на $[x_0; x_n]$;
3. $S(x_i)=y_i$ ($i=0, \dots, n$) - непосредственно условие интерполяции.

Остановимся на построении наиболее популярных в практике аппроксимации функций *кубических сплайнов*.

По определению кубический сплайн $S(x)$ можно представить в виде

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x), & x \in [x_0; x_1]; \\ P_2(x), & x \in [x_1; x_2]; \\ \dots & \dots \\ P_n(x), & x \in [x_{n-1}; x_n]. \end{cases} \quad (5.1)$$

Где каждый из $P_i(x)$ - многочлен третьей степени:

$$P_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + C_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.2)$$

Коэффициенты a_i найдем из условия: $y_i = S(x_i) = P_i(x_i) = a_i$, т.е.

$$a_i = y_i \quad (5.3)$$

Условие непрерывности $S(x)$ в каждом узле приводит к равенствам:

$$P_i(x_i) = P_{i+1}(x_i), \quad i = \overline{1, n-1}$$

В развернутом виде с учетом формулы (5.2) эти равенства примут вид:

$$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + C_{i+1}(x_i - x_{i+1})^2 + d_{i+1}(x_i - x_{i+1})^3 \quad (5.4)$$

Введем обозначения: $h_i = x_i - x_{i-1}$

Понижая в равенстве (5.4) индекс на единицу (меняем i на $i-1$) и, учитывая (5.3), получим:

$$h_i b_i - h_i^2 c_i + h_i^3 d_i = y_i - y_{i-1} \quad (5.5)$$

Условие непрерывности первой производной кубического сплайна сводится к требованию $P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i)$, $i = \overline{1, n-1}$

Тогда дифференцируя формулу (5.2) и используя, введем обозначения, получим:

$$b_{i-1} - b_i + 2h_i c_i - 3h_i^2 d_i = 0 \quad (i = \overline{2, n}) \quad (5.6)$$

Из условия непрерывности второй производной: $P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i)$ получим:

$$C_{i-1} - C_i + 3h_i d_i = 0 \quad (i = \overline{2, n}) \quad (5.7)$$

Составим систему из равенств (5.5)-(5.7) и, решив её, найдем коэффициенты b_i, C_i, d_i .

Однако, для однозначной ее разрешимости добавим условия непрерывности на концах отрезка: $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, $P_1''(x_0) = 0$, $P_n''(x_n) = 0$ т.е.

$$\begin{cases} C_1 - 3h_1 d_1 = 0 \\ a_n = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 - 3h_1 d_1 = 0; \\ a_n = 0; \\ h_i b_i - h_i^2 c_i + h_i^3 d_i = y_i - y_{i-1}; \\ b_{i-1} - b_i + 2h_i c_i - 3h_i^2 d_i = 0; \\ C_{i-1} - C_i + 3h_i d_i = 0. \end{cases}$$

Последовательно, исключая переменные получим

$$h_{i+1} C_{i+1} + 2(h_i + h_{i+1}) C_i + h_i C_{i-1} = 3 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) \quad (5.9)$$

(это уравнение содержит лишь неизвестные C_i).

$$d_i = \frac{C_i - C_{i-1}}{3h_i} \quad (5.10)$$

(это уравнение содержит лишь неизвестные d_i).

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + h_i C_i - h_i^2 d_i \quad (5.11)$$

(это уравнение содержит лишь неизвестные b_i).

Построив кубический сплайн, найдем оценку погрешности интерполяции:

$$|f(x) - S(x)| \leq \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|,$$

где $[a; b]$ - промежуток интерполяции.

2. Пример построения кубического сплайна для функции $y=f(x)$, заданной таблично

Пример: Построить кубический сплайн для функции $y=f(x)$, заданной таблицей:

x_i	-1	0	1	2
y_i	1/2	1	2	4

с дополнительным условием: $S'(-1) = S'(2) = 0$. Найти с помощью $S(x)$ значения функции при $x=0,3$. (Заметим, что в основу таблицы положена функция $y=2^x$).

Решение: $C_0 = 0$ (т.к. не используется в функциях) и $C_3 = 0$ (т.к. из условия (5.8): $C_n = 0$).

Шаг таблицы $h_i = 1$.

из (5.9) получаем:

$$\begin{cases} 1 \cdot C_2 + 2(1+1)C_1 + 1 \cdot C_0 = 3 \left(\frac{y_2 - y_1}{1} - \frac{y_1 - y_0}{1} \right), \text{ при } i=1, \\ 1 \cdot C_3 + 2(1+1)C_2 + 1 \cdot C_1 = 3 \left(\frac{y_3 - y_2}{1} - \frac{y_2 - y_1}{1} \right), \text{ при } i=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 + 4C_1 = 3 \left(\frac{2-1}{1} - \frac{1-\frac{1}{2}}{1} \right) = 3 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}, \\ D + 4C_2 + C_1 = 3 \left(\frac{4-2}{1} - \frac{2-1}{1} \right) = 3(2-1) = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 + 4C_1 = \frac{3}{2}, \\ 4C_2 + C_1 = 3. \end{cases}$$

$$15C_1 = 6 - 3 = 3,$$

$$C_1 = \frac{1}{5}, \quad C_2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{5} = \frac{7}{10}.$$

Из (5.10) имеем:

$$d_1 = \frac{C_1 - C_0}{3h} = \frac{\frac{1}{5} - 0}{3 \cdot 1} = \frac{1}{15},$$

$$d_2 = \frac{C_2 - C_1}{3h} = \frac{\frac{7}{10} - \frac{1}{5}}{3} = \frac{1}{6},$$

$$d_3 = \frac{C_3 - C_2}{3h} = \frac{0 - \frac{7}{10}}{3} = -\frac{7}{30}.$$

Из (5.11) имеем:

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} + hC_1 - h^2d_1 = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1} + 1 \cdot \frac{1}{5} - 1^2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{19}{30},$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{h} + hC_2 - h^2d_2 = \frac{2 - 1}{1} + 1 \cdot \frac{7}{10} - 1 \cdot \frac{1}{6} = 1 + \frac{7}{10} - \frac{1}{6} = \frac{23}{15},$$

$$b_3 = \frac{y_3 - y_2}{h} + hC_3 - h^2d_3 = \frac{4 - 2}{1} + 1 \cdot 0 - 1 \cdot \left(-\frac{7}{30}\right) = 2 + \frac{7}{30} = \frac{67}{30}.$$

из формулы (5.2) получаем:

$$P_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + C_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3, x \in [x_0; x_1],$$

$$P_1(x) = 1 + \frac{19}{30}(x - 0) + \frac{1}{5}(x - 0)^2 + \frac{1}{15}(x - 0)^3, m.e. \quad P_1(x) = 1 + \frac{19}{30}x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{15}x^3, x \in [-1; 0].$$

$$P_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + C_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3, x \in [x_1; x_2],$$

$$P_2(x) = 2 + \frac{23}{15}(x - 1) + \frac{7}{10}(x - 1)^2 + \frac{1}{6}(x - 1)^3, x \in [x_1; x_2]$$

$$P_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3) + C_3(x - x_3)^2 + d_3(x - x_3)^3, x \in [x_2; x_3],$$

$$P_3(x) = 4 + \frac{67}{30}(x - 2) - \frac{7}{30}(x - 2)^3, x \in [1; 2]$$

Следовательно, сплайн S(x) построен:

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = 1 + \frac{19}{30}x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{15}x^3, x \in [-1; 0]; \\ P_2(x) = 2 + \frac{23}{15}(x - 1) + \frac{7}{10}(x - 1)^2 + \frac{1}{6}(x - 1)^3, x \in [0; 1]; \\ P_3(x) = 4 + \frac{67}{30}(x - 2) - \frac{7}{30}(x - 2)^3, x \in [1; 2]. \end{cases}$$

Найдем его значение при x=0,3:

Заметим, что 0,3 ∈ [0; 1], поэтому используем многочлен P₂(x):

$$P(0.3) = 2 + \frac{23}{15}(0.3 - 1) + \frac{7}{10}(0.3 - 1)^2 + \frac{1}{6}(0.3 - 1)^3 = 1.2125.$$

Отметим для сопоставления с той же точностью значение функции, положенной в основу данного примера: f(x) = 2^x; f(0.3) = 2^{0.3} = 1.2311.

Интерполяция сплайнами сопряжена с немалым объемом вычислительной работы. Весьма необычна и форма окончательного результата, ибо сплайн имеет различные представления на различных частичных отрезках интерполяции. Это осложняет доступ к значениям сплайна в каждой конкретной точке, так как предполагает, прежде всего, поиск

параметров, определяющих соответствующую форму сплайна. Эти трудности легко предотвратить при использовании компьютера, так как упорядоченное хранение всех необходимых параметров организовать нетрудно, а выполнение однотипных процедур по вычислению параметров сплайна и его значений может быть обеспечено специальными процедурами.

Этапы выполнения работы:

Задание 1.

По заданной таблице значений функции

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y	y_0	y_1	y_2	y_3

вычислить коэффициенты и составить формулы кубического сплайна.

Задание 2.

Результат интерполирования проверить путем вычисления значений сплайна в узловых точках.

Вариант	x_0	x_1	x_2	x_3	y_0	y_1	y_2	y_3	x
1	-1	0	1	2	-3	5	2	-6	3,8
2	2	3	4	5	4	1	7	2	3,5
3	0	2	4	6	-1	-4	2	-8	0,5
4	7	9	11	13	2	-2	3	-4	4,8
5	-3	-1	1	3	7	-1	4	-6	4,1
6	1	2	3	4	-3	-7	2	8	3,9
7	-1	1	3	5	4	9	1	6	3,3
8	2	4	6	7	9	-3	6	-2	4,0
9	-4	-2	0	2	2	8	5	10	2,9
10	-1	0	1	2	4	-7	1	-8	5,3
11	2	4	6	8	-1	-6	3	12	4,1
12	-9	-7	-5	-3	3	-3	4	-9	7,6
13	0	1	2	3	7	-1	8	2	4,4
14	-8	-7	-6	-5	9	-2	4	6	2,5
15	-7	-5	-3	-1	4	-4	5	10	5,2

Критерии оценивания:

«Отлично» (90 -100% правильно выполненных заданий)

«Хорошо» (72 – 89 % правильно выполненных заданий)

«Удовлетворительно» (61 -71 % правильно выполненных заданий)

«Неудовлетворительно» (<60 % правильно выполненных заданий)

Практическое занятие № 11, 12

Тема раздела: Численное интегрирование

Тема практического занятия: Интегрирование методами: прямоугольников, трапеций, парабол. Интегрирование с помощью формул Гаусса

Цель: - закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;

- закрепить умения приближенно вычислять интегралы при помощи формул Ньютона-Котеса (формула прямоугольников, формула трапеций, формула парабол (Симпсона)), формулы Гаусса.

Планируемые результаты:

уметь: выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи;

знать: методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.

Материально-техническое и комплексно-методическое обеспечение: Рабочая тетрадь, методическое пособие по выполнению практических работ по дисциплине «Численные методы», калькулятор

Методы обучения: перцептивный аспект

Форма организации учебной деятельности: практическое занятие

Время выполнения: 180 минут

Вопросы для проверки готовности обучающихся к практическому занятию:

1. Почему формула Ньютона-Котеса может оказаться непригодной для реального вычисления определенного интеграла?
2. Как связаны задачи численного интегрирования и интерполирования?
3. Чем объясняется название формулы прямоугольников?
4. Чем объясняется название формулы трапеций?
5. В чем выражаются преимущества формулы Симпсона перед формулой трапеций?
6. Каким образом при использовании формулы парабол можно рассчитать требуемое число отрезков разбиения для достижения заданной точности интегрирования ε ?
7. На какой идее основывается построение квадратурных формул Гаусса?
8. Запишите формулу Гаусса.
9. Как строятся квадратурные формулы Гаусса, какова их погрешность (остаточный член)?

Форма отчетности по занятию: письменная работа

Последовательность выполнения работы

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
 2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
 3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.
- Краткие теоретические сведения:**

1. Подстановка задачи численного интеграла

При вычислении определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx ,$$

где $f(x)$ - функция непрерывная на отрезке $[a,b]$ используется формула Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (6.1)$$

Однако бывают случаи, когда первообразную $F(x)$ нельзя найти, или не всегда удается довести вычисления до числового значения. Иногда подынтегральная функция может быть задана таблично или графиком, поэтому формула (6.1) не исчерпывает практических приемов вычисления интегралов.

На практике часто применяют различные методы приближенного (численного) интегрирования.

Определение: Формулы, используемые для приближенного вычисления интегралов, называют *квадратурными формулами*.

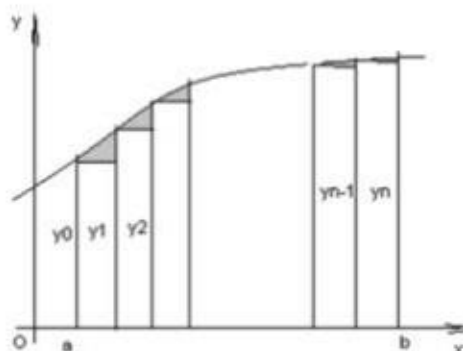
Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция $f(x)$ заменяется на отрезке $[a;b]$ интерполяционным многочленом Лагранжа $Ln(x)$, и тогда:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b Ln(x)dx . \quad (6.2)$$

Подобный подход удобен тем, что он приводит к алгоритмам, легко реализуемым на компьютере, и позволяющим получать результат с точностью, достаточной для широкого круга практических приложений.

2. Метод прямоугольников

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, отрезок $[a;b]$ разбивают на n криволинейную трапецию, заменяют прямоугольником с основанием $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, и высотой y_0, y_1, \dots, y_n , соответственно.

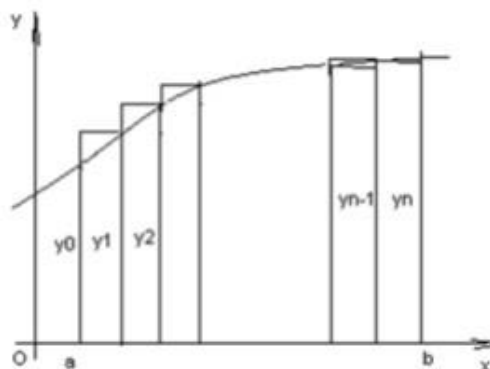


Данный подход к решению задачи дает площадь криволинейной трапеции, т.е. значение определенного интеграла с недостатком

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (6.3)$$

Формула (6.3) называется *формулой прямоугольников с недостатком*.

Аналогично можно получить формулу для вычисления определенного интеграла с избытком.



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \quad (6.4)$$

Формула (6.4) называется *формулой прямоугольников с избытком*, где значение

$$y_k = f(a + k \cdot \Delta x), \quad k = \overline{0, n}. \quad (6.5)$$

Пример: Вычислить по формуле прямоугольников интеграл

$$\int_0^{\pi/4} \cos x dx \quad (n=5).$$

Решение:

Имеем $a=0$, $b = \pi/4$, $f(x) = \cos x$.

$$\text{Тогда } \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi/4 - 0}{5} = \frac{\pi}{20} \approx 0,157$$

Вычислим значение функции по формуле (6.5):

$$y_0 = f(a + 0 \cdot \Delta x) = \cos(0) = 1,$$

$$y_1 = f(a + 1 \cdot \Delta x) = \cos(0 + \frac{\pi}{20}) = \cos \frac{\pi}{20} \approx \cos 9^\circ \approx 0,987,$$

$$y_2 = \cos(0 + 2 \cdot \frac{\pi}{20}) = \cos \frac{\pi}{10} = \cos 18^\circ \approx 0,951,$$

$$y_3 = \cos(0 + 3 \cdot \frac{\pi}{20}) = \cos \frac{3\pi}{20} = \cos 27^\circ \approx 0,891,$$

$$y_4 = \cos(0 + 4 \cdot \frac{\pi}{20}) = \cos \frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ \approx 0,809.$$

Применяя формулу прямоугольника с недостатком (6.2) получим

$$\int_0^{\pi/4} \cos x dx = 0,157(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 0,157 \cdot (1 + 0,987 + 0,951 + 0,891 + 0,809) = 0,728$$

Вычислим данный интеграл по формуле Ньютона - Лейбница и сравним результаты:

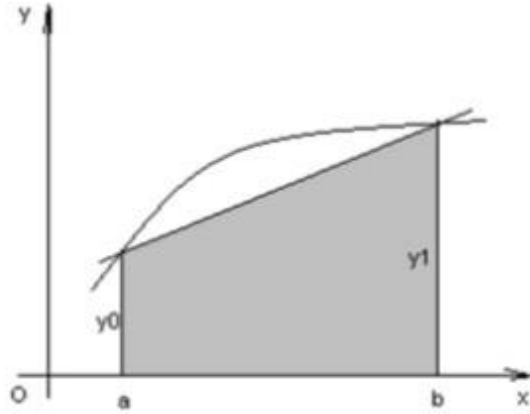
$$\int_0^{\pi/4} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/4} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Относительная погрешность вычисления:

$$\Delta = \frac{(I_{\text{точн}} - I_{\text{прибл}})}{I_{\text{точн}}} \approx 0,029.$$

3. Метод трапеций

Геометрический смысл этого метода практического вычисления определенного интеграла состоит в том, что нахождение площади криволинейной трапеции заменяется нахождением площади приблизительно равновеликой прямолинейной трапеции.



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} (b - a) \quad (6.6)$$

Для повышения точности результата разобьём фигуру на n частей, а затем суммируем площади получившихся трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right), \text{ или} \quad (6.7)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

где $y_k = f(x_k) = f(a + k\Delta x)$, $k = \overline{0, n}$.

Формула (6.7) называется *формулой трапеций*.

Пример: По формуле трапеций вычислить интеграл

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \quad (n=5).$$

Решение: Имеем $a=0$, $b=5$, $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$, $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{5} = 1$.

Вычислим промежуточные значения функции в узлах:

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{\sqrt{0+4}} = \frac{1}{2} = 0,5, \quad y_1 = y(1) = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = 0,447,$$

$$y_2 = y(2) = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,409, \quad y_3 = y(3) = \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0,377,$$

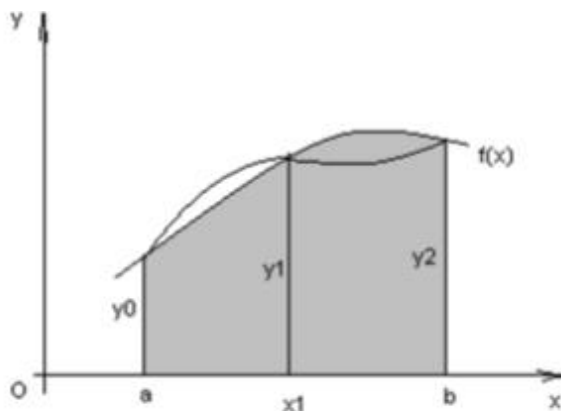
$$y_4 = y(4) = \frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0,353, \quad y_5 = y(5) = \frac{1}{\sqrt{9}} \approx 0,333.$$

Тогда по формуле трапеций (6.7) имеем:

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \approx 1 \left(\frac{0,5}{2} + 0,447 + 0,409 + 0,377 + 0,353 + \frac{0,3}{2} \right) \approx 2,002.$$

4. Метод парабол

Замена подынтегральной функции $f(x)$ параболой, проходящей через точки $M_i(x_i; y_i)$, ($i=0,1,2$) позволяет получать более точное значение определенного интеграла.



Если считать, что n - четное ($n=2m$), то получим:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{3} \left(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + y_2 + \dots + 2y_{2m-1} \right), \quad (6.8)$$

где $h = \frac{b-a}{n}$.

Формула (6.8) называется *формулой парабол* или *формулой Симпсона*. Для оценки погрешности формулы Симпсона применяется формула

$$\max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \cdot \frac{|b-a|h^4}{180} \leq \varepsilon, \quad (6.9)$$

Как следует из оценки, формула Симпсона, оказывается точной для многочленов до 3-ей степени включительно. Так как для этих случаев производная 4-го порядка равна 0.

Формула Симпсона обладает повышенной точностью по сравнению с формулой трапеций, это обозначает, что для достижения той же точности, что и в формуле трапеций, в ней можно брать меньшее число n - отрезков разбиения. Последнее обстоятельство весьма важно для вычислений. Поскольку основное время затрачивается на нахождение значений функции в узлах. Укажем простой практический прием, позволяющий прогнозировать требуемое число отрезков разбиения по заданной точности ε .

$$h \leq \sqrt{\frac{180\varepsilon}{|b-a| \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|}}, \quad (6.10)$$

Пример: Вычислить интеграл по формуле парабол

$$\int_0^1 x^2 \sin x dx, \quad (n=10).$$

Решение: Значения подынтегральной функции в узловых точках запишем в таблицу:

x_i	y_i
0	0
0,1	0,0019966
0,2	0,0079467
0,3	0,0531936
0,4	0,0623068
0,5	0,2397124
0,6	0,2032711
0,7	0,6313333
0,8	0,4591078
0,9	1,2689896
1	0,841478

Подставим найденные значения в формулу Симпсона, учитывая, что $h=0,1$:

$$\int_0^1 x^2 \sin x dx \approx \frac{2 \cdot 0,1}{3} \left(\frac{0 + 0,841471}{2} + 2 \cdot 0,0019966 + 0,0079467 + 2 \cdot 0,0531936 + 0,0623068 + \right. \\ \left. + 2 \cdot 0,2397124 + 0,2032711 + 2 \cdot 0,6313333 + 0,4591078 + 2 \cdot 1,2689896 \right) \approx 0,2232395$$

В данном случае легко вычислить «точное» значение этого интеграла, пользуясь формулой Ньютона - Лейбница

$$\int_0^1 x^2 \sin x dx = 2 \sin 1 + \cos 1 - 2 = 0,223244275.$$

Как видим, результат, полученный с помощью приближенной формулы парабол, дает высокую точность.

5. Квадратные формулы Гаусса

Существует подход к построению квадратурных формул, в котором главную роль играет выбор узлов для интерполирования подынтегральной функции, называемый *методом Гаусса*.

При получении квадратных формул Гаусса в исходном интеграле выполняется замена переменной, переводящая интеграл по отрезку $[a; b]$ в интеграл по отрезку $[-1; 1]$.

$$t = \frac{2x - (b + a)}{b - a} \text{ или } x = \frac{1}{2}(b - a)t + \frac{1}{2}(b + a) \quad (6.11)$$

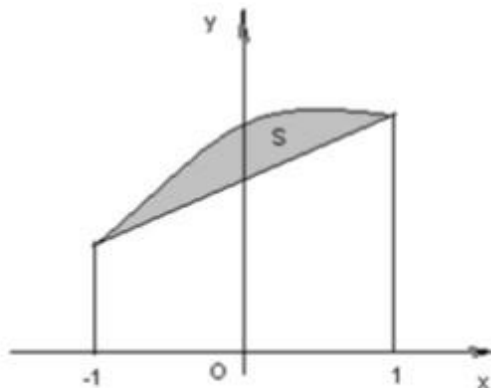
Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b - a) \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}(b - a)t + \frac{1}{2}(b + a)\right) dt \quad (6.12)$$

Последний интеграл обозначим $\int_{-1}^1 \varphi(t) dt$ и можно далее, развивать метод Гаусса применительно к нему.

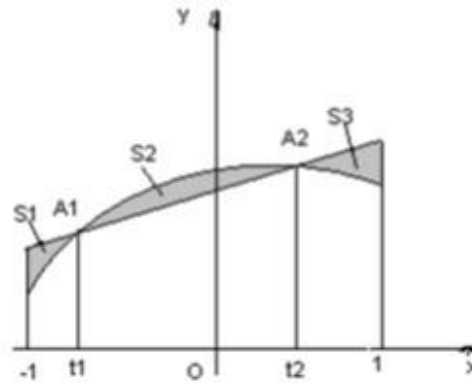
Для разъяснения существа метода Гаусса будем использовать простейшую (линейную) интерполяцию подынтегральной функции:

Если в качестве узлов интерполяции взять концы отрезка $[-1; 1]$, то различие в площадях криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = \varphi(x)$ и «обычной» трапеции, ограниченной сверху прямой, проведенной через концы указанной кривой, фиксировано видом функции $y = \varphi(x)$.



Однако, если сделать узлы интерполяции «подвижными», то можно выбрать их таким образом, чтобы разность между площадями криволинейной и «обычной» трапеции была значительно меньше.

Более того, можно сделать эти площади равными ($S_1 + S_3 = S_2$), т.е. аппроксимировать интеграл точно, но для этого необходимо определить точки t_1, t_2 .



Сформулируем задачу следующим образом:

Выбрать значения t_1, t_2 так, чтобы площадь трапеции, ограниченной сверху прямой, проходящей через точки $A_1(t_1; \varphi(t_1))$, $A_2(t_2; \varphi(t_2))$, была равна интегралу от любого многочлена некоторой (наивысшей возможной) степени.

Так как положение точек A_1, A_2 определяют четыре координаты, то это многочлен может определяться максимум четырьмя коэффициентами, т.е. является многочленом третьей степени.

$$P_3(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (6.13)$$

Легко установить, что уравнение прямой, проходящей через точки A_1, A_2 имеет вид:

$$y = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} t + \frac{t_2 \varphi_1 - t_1 \varphi_2}{t_2 - t_1}, \quad (6.14)$$

где $\varphi_1 = \varphi(t_1)$, $\varphi_2 = \varphi(t_2)$.

Будем выбирать t_1, t_2 так, чтобы равенство

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} t + \frac{t_2 \varphi_1 - t_1 \varphi_2}{t_2 - t_1} \right) dt = \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) dt \quad (6.15)$$

имело место при любых a_0, a_1, a_2, a_3 .

Вычисляя значения t_1, t_2 , получим:

Если взять узлами линейной интерполяции числа $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (6.16), то

интеграл, вычисленный по формуле $I = \int_{-1}^1 \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} t + \frac{t_2 \varphi_1 - t_1 \varphi_2}{t_2 - t_1} \right) dt$, точно совпадает с интегралом от любого многочлена третьей степени.

Вычислив интеграл по указанной формуле с учётом (6.16), получим

$$I = \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (6.17)$$

Формула (6.17) и называется *квадратурной формулой Гаусса*.

С учетом формулы (6.12) формула Гаусса примет вид:

$$I_r = \frac{1}{2}(b-a) \left[f\left(-\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right) + f\left(\frac{d-a}{2\sqrt{3}} + \frac{d+a}{2}\right) \right] \quad (6.18)$$

Оценка погрешности вычисления интеграла по формуле (6.17) проводится по формуле:

$$|I - I_r| \leq \frac{1}{35} \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \cdot \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \quad (6.19)$$

Для повышения точности результата отрезок $[a;b]$ разделим на n частей и применим формулу (6.18) на каждом из них.

Получим формулу для вычисления интеграла:

$$I_r = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f\left(x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) \right) \quad (6.20)$$

Формула для оценки погрешности примет вид:

$$|I - I_r| \leq \frac{1}{4320 \cdot n^4} (b-a)^5 \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \quad (6.21)$$

Пример: Вычислить интеграл $\int_0^1 x^2 \sin x dx$ по формуле Гаусса при $n = 10$.

Решение: Имеем $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = x^2 \sin x$.

Тогда $h = \frac{b-a}{n} = 0,1$.

Составим таблицу значений, входящих в формулу (6.20)

x_i	$x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}}$	$x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2\sqrt{3}}$	y_i
0	0,02113249	0,078868	0,00000944 0,00049005
0,1	0,121132249	0,178868	0,00177304 0,00569215
0,2	0,22113249	0,278868	0,01072537 0,02140672
0,3	0,32113249	0,378868	0,03255086 0,05309115
0,4	0,42113249	0,478868	0,07250071 0,10566206
0,5	0,52113249	0,578868	0,13520907 0,18331848
0,6	0,62113249	0,678868	0,22452206 0,28938023
0,7	0,72113249	0,778868	0,34334373 0,42614496
0,8	0,82113249	0,878868	0,49350196 0,59476723
0,9	0,92113249	0,978868	0,67563779 0,795162236
1,0			
			Σ 4,46488894

Подставляя найденное значение суммы значений функции y_i , в формулу (6.20) получим:

$$I_r = \frac{0,1}{2} \cdot 4,46488894 = 0,22324447.$$

Этапы выполнения работы:

Задание 1.

Вычислить интеграл от заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ при делении отрезка на 10 равных частей тремя способами: 1) по формуле прямоугольников; 2) по формуле трапеций; 3) по формуле Симпсона; Сравнить точность полученных результатов.

Задание 2.

Вычислить интеграл вручную по формуле Ньютона-Лейбница Сравнить полученные результаты с результатами, полученными при выполнении задания 1.

Задание 3.

Вычислить интеграл по формуле Гаусса от заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ при делении отрезка на 10 равных частей.

Сравнить полученный результат с результатами, полученными при выполнении заданий 1 и 2.

Результаты оформить в таблицу:

Метод интегрирования	Значение интеграла
Метод прямоугольников	
Метод трапеций	
Метод парабол	
Метод Гаусса	

Задание 4.

Сделать вывод о точности методов

Вариант	$f(x)$	a	b
1	$0,5 + x \lg x$	1	2
2	$(x + 1,9) \sin(x/3)$	1	2
3	$\frac{1}{x} \ln(x+2)$	2	3
4	$(2x + 0,6) \cos(x/2)$	1	2
5	$2,6x^2 \ln x$	1,2	2,2
6	$(x^2 + 1) \sin(x - 0,5)$	0,5	1,5
7	$x^2 \cos(x/4)$	2	3
8	$\frac{\sin(0,2x - 3)}{x^2 + 1}$	3	4
9	$3x + \ln x$	1	2
10	$4xe^{x^2}$	-1	0
11	$3x^2 + \operatorname{tg} x$	-0,5	0,5
12	$\frac{3x^2 + \sin x}{x^2}$	0,1	1,1
13	$3xe^{\cos x}$	0,2	1,2
14	$x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	1,5	2,5
15	$\sqrt{x} e^{-x}$	0,1	1,1

Практическое занятие № 13, 14

Тема раздела: Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Тема практического занятия: Применение метода Эйлера. Применение метода Рунге - Кутты

Цель: - закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;

- получить умения приближенно находить решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера, методом Рунге-Кутты.

Планируемые результаты:

уметь: разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата.

знать: методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.

иметь практический опыт:

Материально-техническое и комплексно-методическое обеспечение: Рабочая тетрадь, методическое пособие по выполнению практических работ по дисциплине «Численные методы», калькулятор

Методы обучения: перцептивный аспект

Форма организации учебной деятельности: практическое занятие

Время выполнения: 180 минут

Вопросы для проверки готовности обучающихся к практическому занятию:

1. Что является решением дифференциального уравнения?
2. На какие группы подразделяются приближенные методы решения дифференциальных уравнений?
3. В какой форме получается приближенное решение дифференциального уравнения по методу Эйлера?
4. В чем основная идея метода Рунге-Кутты?
5. В чем отличие одношаговых методов Эйлера и Рунге-Кутты?

Форма отчетности по занятию: письменная работа

Последовательность выполнения работы

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Краткие теоретические сведения:

Численные методы решения дифференциальных уравнений. Постановка задач

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$y' = f(x, y) \quad (7.1)$$

Эта задача известна, как **задача Коши**: найти решение уравнения (7.1) в виде функции $y(x)$, удовлетворяющей начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \quad (7.2)$$

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую $y=y(x)$, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$, при выполнении равенства (7.1).

Существует несколько классов дифференциальных уравнений 1-го порядка, для которых решение может быть найдено аналитически. Но даже для таких уравнений решение не всегда удается довести до вида $y=y(x)$. Многие же дифференциальные уравнения, к которым приводят математические модели реальных процессов, не могут быть решены аналитически. По этой причине разработаны многочисленные методы приближенного решения дифференциальных уравнений.

Эти методы подразделяются на 3 основные группы:

- 1) *аналитические методы*, применения которых дает приближенное решение дифференциальных уравнений в виде формулы;
- 2) *графические методы*, дающие приближенное решение в виде графика;
- 3) *численные методы*, когда искомая функция получается в виде таблицы.

1. Метод Эйлера

В основе метода ломанных Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения. Однако этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме.

Пусть дано уравнение (7.1) с начальным условием (7.2), т.е. поставлена задача Коши.

Вначале найдем простейшим способом приближенное значение решения в некоторой точке $x_1 = x_0 + h$, где h – достаточно малый шаг.

Заметим, что уравнение (7.1) совместно с начальным условием (7.2) задают направление касательной к искомой интегральной кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$. Двигаясь вдоль этой касательной, получим приближенное значение решения в точке x_1 :

$$y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0) \quad (7.3)$$

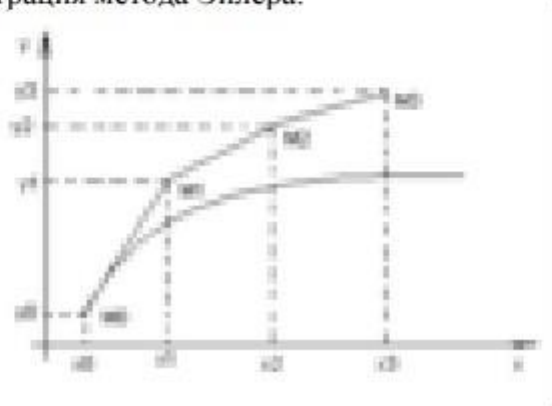
Аналогично, найдем приближенное значение решения в точке $x_2 = x_1 + h$, и т.д.

Продолжая эту идею, построим систему равностоящих точек $x_i = x_0 + ih$, $i=0, \dots, n$.

Получение таблицы значений искомой функции $y(x)$ по методу Эйлера заключается в циклическом применении пары формул:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= hf(x_i; y_i); \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i \end{aligned} \quad (7.4)$$

Геометрическая иллюстрация метода Эйлера:



Вместо кривой в реальности получается совокупность прямых – ломаная Эйлера.

Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, в которых решение получается от одного узла к другому, называются *пошаговыми*.

Метод Эйлера – простейший пошаговый метод.

Отметим, что оценка погрешности метода при таком элементарном рассмотрении невозможна даже на первом шаге. Кроме того, особенностью любого пошагового метода является то, что, начиная со второго шага, исходное значение y_i в формуле (7.4) само является приближенным, т.е. погрешность на каждом шаге систематически возрастает.

Наиболее используемым методом оценки точности, как метода Эйлера, так и других пошаговых методов приближенного численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений является *способ двойного прохождения заданного отрезка с шагом h и с шагом $h/2$* . Совпадение соответствующих десятичных знаков в полученных двумя способами результатах дает основание считать их верными.

Пример: Решить методом Эйлера дифференциальное уравнение $y' = \cos y + 3x$ с начальным условием $y(0) = 1,3$ на отрезке $[0;1]$ применив $h=0,2$.

Решение: Имеем $f(x, y) = \cos y + 3x$.

Составим таблицу значений функции $f(x, y)$ с шагом h и $h/2$.

x	$y_i (h=0.2)$	$y_i (h=0.1)$
0	1.3	1.3
0.1		1.33
0.2	1.35	1.38
0.3		1.46
0.4	1.52	1.56
0.5		1.68
0.6	1.77	1.82
0.7		1.98
0.8	2.09	2.15
0.9		2.33
1	2.47	2.53

При составлении таблицы проводились следующие вычисления:

Если $h=0,2$:

1) $x_0=0, y_0=1,3$ из начального условия;

2) $x_1=0,1$,

$$\Delta y_0 = h(\cos y_0 + 3x_0) = 0.2(\cos 1.3 + 3 \cdot 0) = 0.054;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1.3 + 0.054 = 1.35$$

3) $x_2=0,2$,

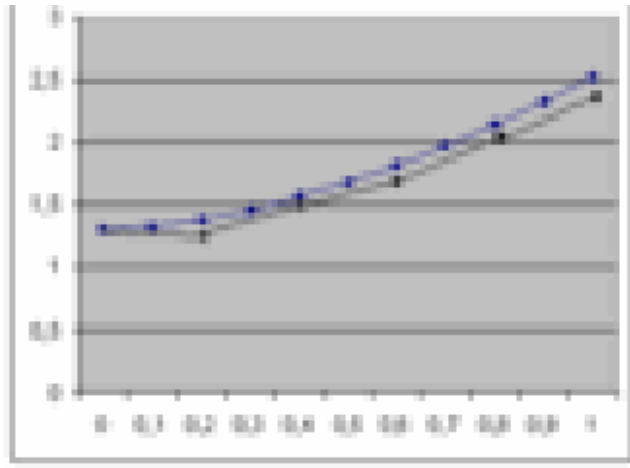
$$\Delta y_1 = h(\cos y_1 + 3x_1) = 0.2(\cos 1.35 + 3 \cdot 0,2) = 0.16;$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1.35 + 0.16 = 1.52$$

И т.д.

Аналогичные вычисления проводились и для $h=0,1$.

Таким образом, приближенное решение уравнения получаем в виде таблицы. Построим ломаную Эйлера для $h=0,2$ и $h=0,1$ в одной системе координат.



2. Метод Рунге-Кутты

Если к методу Эйлера подойти другим путем, не используя геометрических построений, то необходимо рассматривать производные функции $f(x, y)$ и раскладывать эту функцию в степенной ряд. Но нахождение производных не является стандартной задачей, применяемой при решении математических задач систем программирования.

Альтернативный путь открывает метод Рунге-Кутты, названный по имени его создателей.

Основная идея метода Рунге-Кутты такова: вместо использования в формулах частных производных функции $f(x, y)$ использовать лишь саму эту функцию, но на каждом шаге вычислять ее значение в нескольких точках.

На практике соблюдается некоторый компромисс между высоким порядком формул и их громоздкостью с одной стороны, и объемом вычислений по ним для достижения заданной точности, с другой. Запишем самую распространяемую формулу Рунге-Кутты четвертого порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4), \quad (7.5)$$

$$\text{где, } r_1 = hf(x_i, y_i),$$

$$r_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{r_1}{2}\right), \quad (7.6)$$

$$r_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{r_2}{2}\right),$$

$$r_4 = hf(x_i + h, y_i + r_3).$$

Общий недостаток методов Рунге-Кутты – отсутствие простых способов оценки погрешности метода. Погрешность на одном шаге оценить сравнительно не трудно, гораздо труднее оценить накопление погрешностей на протяжении многих шагов. Широко используемый на практике для этих методов способ контроля точности – *двойной счет*: вычисляем решение дифференциального уравнение с шагом h и $h/2$, а потом сравниваем полученные результаты.

Пример: Решить дифференциальное уравнение $y' = y(1-x)$ на отрезке $[0; 0.5]$ с начальным условием $y(0)=1$ и шагом $h=0.05$.

Решение: Сначала решим это уравнение аналитически:

$y' = y(1-x)$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = y(1-x),$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (1-x) dx,$$

$$\ln y = x - \frac{x^2}{2} + C,$$

Применим начальное условие $y(0) = 1$, получим:

$$\ln 1 = 0 - 0 + C, \quad C = 0,$$

Таким образом, частное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию:

$$y = e^{x - \frac{x^2}{2}}.$$

Пользуясь этой формулой, можно получить таблицу «точного» решение уравнения.

Найдем приближенное решение дифференциальное уравнение по методу Рунге-Кутта. Проведем последовательные вычисления по формулам (7.5), (7.6):

Имеем: $f(x,y)=y(1-x)$, $x_0=0$, $y_0=1$, $h=0.05$. Тогда

$$r_1 = hf(x_0, y_0) = h \cdot y_0(1 - x_0) = 0.05 \cdot 1 \cdot (1 - 0) = 0.05,$$

$$\begin{aligned} r_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{r_1}{2}\right) = hf\left(0 + \frac{0.05}{2}; 1 + \frac{0.05}{2}\right) = \\ &= hf(0.025; 1.025) = 0.05 \cdot 0.025 \cdot (1 - 0.025) = 0.04997, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_3 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{r_2}{2}\right) = hf\left(0.025; 1 + \frac{0.04997}{2}\right) = \\ &= hf(0.025; 1.025) = 0.050 \cdot 0.025 \cdot (1 - 0.025) = 0.04997, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + r_3) = hf(0 + 0.05; 1 + 0.04997) = \\ &= hf(0.05; 1.04997) = 0.05 \cdot 1.04997 \cdot (1 - 0.05) = 0.04987. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения в формулу (7.5):

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4) = 1 + \frac{1}{6}(0.05 + 2 \cdot 0.04997 + 2 \cdot 0.04997 + 0.04987) = 1.04996.$$

Поскольку вычисления достаточно громоздки и трудоемки, то численные решения заданного уравнения можно найти с помощью программы на компьютере.

Для сравнения результатов построим таблицу, в которой укажем численные решения, полученные по методу Эйлера, методу Рунге-Кутта и «точное решение».

X	Y		
	метод Эйлера	метод Рунге-Кутта	«точное решение»
0,00	1	1	1
0,05	1,05	1,0499	1,0499
0,10	1,0999	1,0997	1,0997
0,15	1,1494	1,1488	1,1488
0,20	1,1982	1,1972	1,1972
0,25	1,2462	1,2445	1,2445
0,30	1,2929	1,2905	1,2905
0,35	1,3381	1,3348	1,3348
0,40	1,3816	1,3771	1,3771
0,45	1,4231	1,4173	1,4173
0,50	1,4622	1,4550	1,4550

Из таблицы видно, что результаты, получения по методу Рунге-Кутта практически совпадают с «точным» решением уравнения, в отличие от соответствующих значений, полученных по методу Эйлера.

Этапы выполнения работы:

Задание 1.

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ на отрезке $[a;b]$ при заданном начальном условии $y(a)=y_0$ и шаге интегрирования h методом Эйлера с применением «ручных» вычислений с шагом $2h$.

Пользуясь таблицей, сделать ручную прикидку графика интегральной кривой на бумаге.

Задание 2.

Найти точное решение задачи Коши.

Вариант	$f(x)$	a	b	y_0	h
1	$(x^2 + y^2) - 2xyy' = 0$	3	5	1	0.2
2	$y' = \frac{y}{x} - 1$	2.6	4.6	1	0.2
3	$yy' + (x - 2y) = 0$	0	2	0	0.2
4	$(x - y)y - x^2y' = 0$	1	3	1	0.2
5	$xy' - y = y^3$	0	2	0	0.2
6	$xyy' = 1 - x^2$	1	3	1	0.2
7	$yy' + x = 1$	0.5	2.5	0	0.2
8	$y - xy' = 1 + x^2y'$	0.2	2.2	1	0.2
9	$xy + (x + 1)y' = 0$	1	3	2	0.2
10	$2x^2yy' + y^2 = 2$	3	5	1	0.2
11	$(xy - x^2)y' = y^2$	0.2	2.4	1	0.2
12	$y - xy' = x + yy'$	1	3	0	0.2
13	$y + 2 = (2x + y - 4)y'$	2.6	4,6	2	0.2
14	$(3x - 1)y' + y^2 = 0$	1.5	3,5	0	0.2
15	$xy' + 2y = 2xyy'$	2.1	4.1	0	0.2

Информационные источники:

Электронные издания (электронные ресурсы)

1. Зенков, А. В. Численные методы: учебное пособие для среднего профессионального образования / А. В. Зенков. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 122 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10895-8. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/471647>
2. Гателюк, О. В. Численные методы: учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Гателюк, Ш. К. Исмаилов, Н. В. Манюкова. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 140 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07480-2. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/471927>

Интернет ресурсы

- | | | | | | |
|---|--------|--------|---|-------|----------|
| 1. Журнал | «Аллея | науки» | - | Режим | доступа: |
| https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32508797 | | | | | |
| 2. Журнал | «Аллея | наук» | - | Режим | доступа: |
| https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36662527 | | | | | |

Электронно-библиотечные системы:

1. «ЭБС IPRbooks», ООО «Ай Пи Эр Медиа»
2. ЭБС «Электронная библиотека технического вуза», ООО «Политехресурс»
3. ЭБС «Лань», ООО «Издательство Лань»
4. «ЭБС elibrary», ООО «РУНЭБ»
5. ЭБС «ЮРАЙТ»
6. ЭБС «Book.ru»